Matematica

Appunti di Matematica 1

Michele prof. Perini

IISS Copernico Pasoli - Liceo Scientifico

A.S. 2024-2025

12. Introduzione alla statistica
    - Dati e loro rappresentazione
    - Frequenze assolute
    - Frequenze relative
    - Frequenze cumulate
    - Frequenze relative cumulate
    - La media aritmetica
    - La varianza
    - La deviazione standard
    - Il coefficiente di variazione

$\mathbb{N}$

I numeri naturali ($\mathbb{N}$) si possono definire a partire dalle loro caratteristiche:

- il più piccolo numero naturale è 0

$\mathbb{N}$

I numeri naturali ($\mathbb{N}$) si possono definire a partire dalle loro caratteristiche:

- il più piccolo numero naturale è 0
- ogni numero naturale ha un successore

$\mathbb{N}$

I numeri naturali ($\mathbb{N}$) si possono definire a partire dalle loro caratteristiche:

- il più piccolo numero naturale è 0
- ogni numero naturale ha un successore
- ogni numero naturale (tranne lo 0) ha un precedente

$\mathbb{N}$

I numeri naturali ($\mathbb{N}$) si possono definire a partire dalle loro caratteristiche:

- il più piccolo numero naturale è 0
- ogni numero naturale ha un successore
- ogni numero naturale (tranne lo 0) ha un precedente
- la totalità dei numeri naturali si ottiene a partire da 0 reiterando l'operazione di successore.

$\mathbb{N}$

I numeri naturali ($\mathbb{N}$) si possono definire a partire dalle loro caratteristiche:

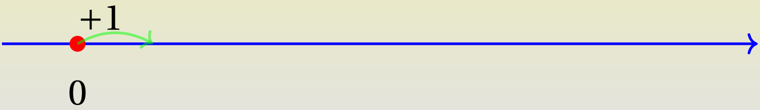
- il più piccolo numero naturale è 0
- ogni numero naturale ha un successore
- ogni numero naturale (tranne lo 0) ha un precedente
- la totalità dei numeri naturali si ottiene a partire da 0 reiterando l'operazione di successore.

$\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots\}$$

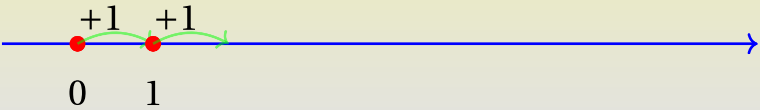
$\mathbb{N}$

É possibile rappresentare i numeri naturali su una retta orientata come punti distinti, a partire da 0, ed effettuando l'operazione di successore.



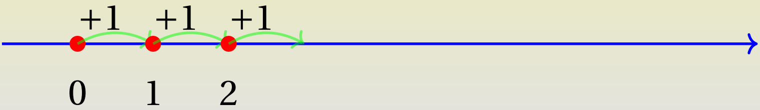
$\mathbb{N}$

É possibile rappresentare i numeri naturali su una retta orientata come punti distinti, a partire da 0, ed effettuando l'operazione di successore.



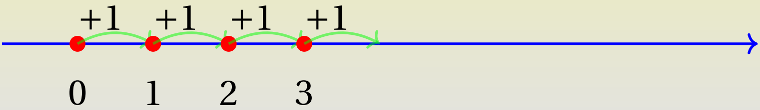
$\mathbb{N}$

É possibile rappresentare i numeri naturali su una retta orientata come punti distinti, a partire da 0, ed effettuando l'operazione di successore.



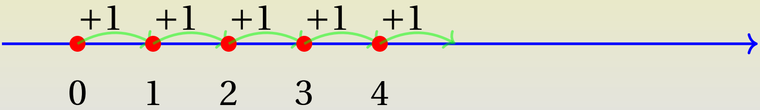
$\mathbb{N}$

É possibile rappresentare i numeri naturali su una retta orientata come punti distinti, a partire da 0, ed effettuando l'operazione di successore.



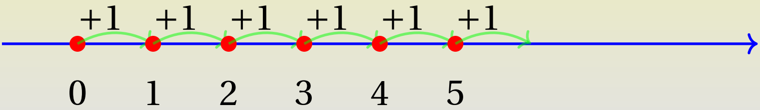
$\mathbb{N}$

É possibile rappresentare i numeri naturali su una retta orientata come punti distinti, a partire da 0, ed effettuando l'operazione di successore.



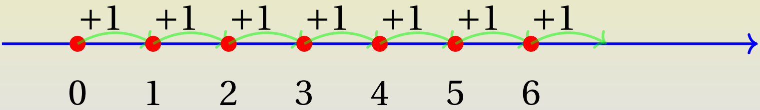
$\mathbb{N}$

É possibile rappresentare i numeri naturali su una retta orientata come punti distinti, a partire da 0, ed effettuando l'operazione di successore.



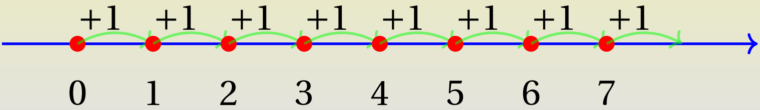
$\mathbb{N}$

É possibile rappresentare i numeri naturali su una retta orientata come punti distinti, a partire da 0, ed effettuando l'operazione di successore.



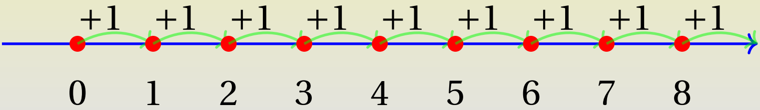
$\mathbb{N}$

É possibile rappresentare i numeri naturali su una retta orientata come punti distinti, a partire da 0, ed effettuando l'operazione di successore.

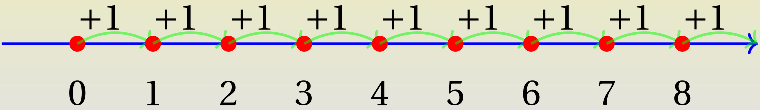


$\mathbb{N}$

É possibile rappresentare i numeri naturali su una retta orientata come punti distinti, a partire da 0, ed effettuando l'operazione di successore.

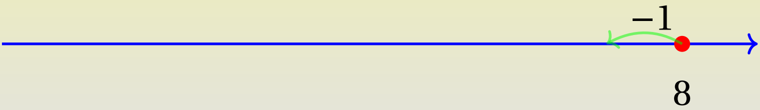


É possibile rappresentare i numeri naturali su una retta orientata come punti distinti, a partire da 0, ed effettuando l'operazione di successore.



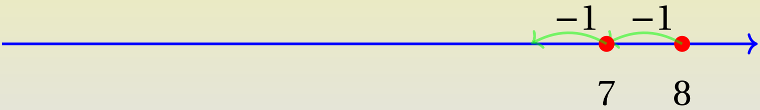
$\mathbb{N}$

Per tutti i naturali (tranne 0) è possibile effettuare l'operazione di precedente.

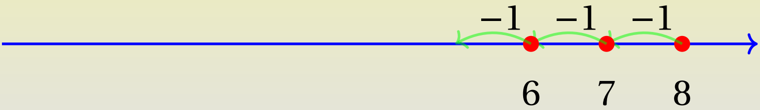


$\mathbb{N}$

Per tutti i naturali (tranne 0) è possibile effettuare l'operazione di precedente.

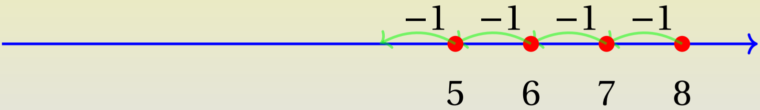


Per tutti i naturali (tranne 0) è possibile effettuare l'operazione di precedente.



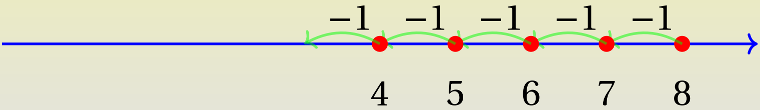
$\mathbb{N}$

Per tutti i naturali (tranne 0) è possibile effettuare l'operazione di precedente.



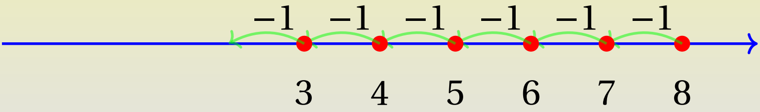
$\mathbb{N}$

Per tutti i naturali (tranne 0) è possibile effettuare l'operazione di precedente.



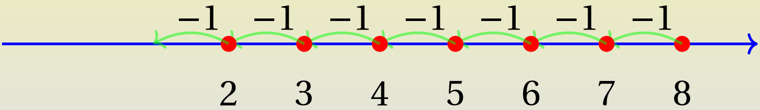
$\mathbb{N}$

Per tutti i naturali (tranne 0) è possibile effettuare l'operazione di precedente.

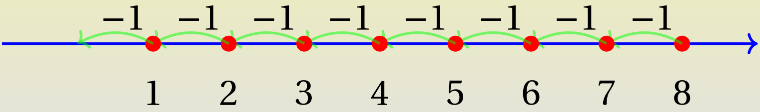


$\mathbb{N}$

Per tutti i naturali (tranne 0) è possibile effettuare l'operazione di precedente.

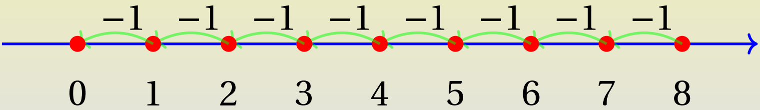


Per tutti i naturali (tranne 0) è possibile effettuare l'operazione di precedente.



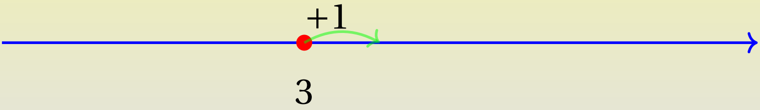
$\mathbb{N}$

Per tutti i naturali (tranne 0) è possibile effettuare l'operazione di precedente.



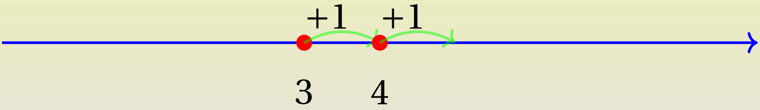
Addizione

L'addizione è una operazione che equivale a ripetere l'operazione di successore. Ad esempio $3+2=5$ significa:



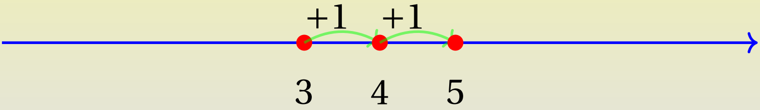
Addizione

L'addizione è una operazione che equivale a ripetere l'operazione di successore. Ad esempio $3+2=5$ significa:



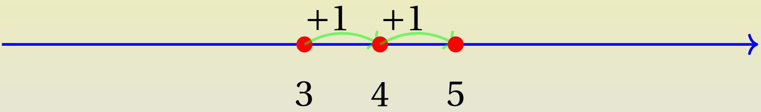
Addizione

L'addizione è una operazione che equivale a ripetere l'operazione di successore. Ad esempio $3+2=5$ significa:



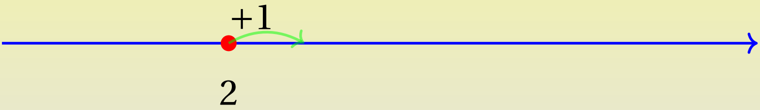
$\mathbb{N}$ Addizione

L'addizione è una operazione che equivale a ripetere l'operazione di successore. Ad esempio $3 + 2 = 5$ significa:



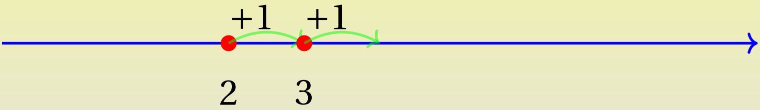
Addizione

oppure equivalentemente $2 + 3 = 5$:



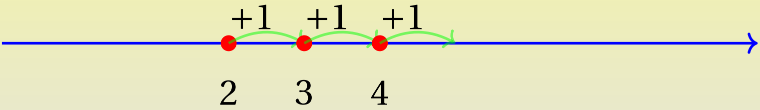
Addizione

oppure equivalentemente $2 + 3 = 5$:



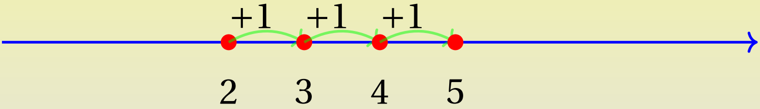
Addizione

oppure equivalentemente $2+3=5$:



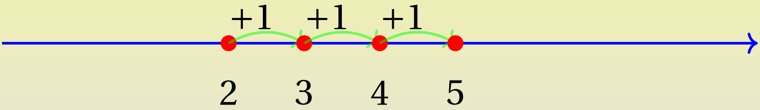
$\mathbb{N}$ Addizione

oppure equivalentemente $2 + 3 = 5$:



Addizione

oppure equivalentemente $2 + 3 = 5$:



Addizione

Proprietà di cui gode l'addizione:

Addizione - proprietà associativa

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Addizione

Proprietà di cui gode l'addizione:

Addizione - proprietà associativa

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Addizione - proprietà commutativa

$$a + b = b + a$$

Addizione

Proprietà di cui gode l'addizione:

Addizione - proprietà associativa

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Addizione - proprietà commutativa

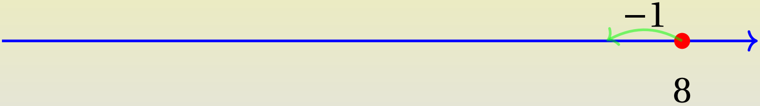
$$a + b = b + a$$

Addizione - neutro

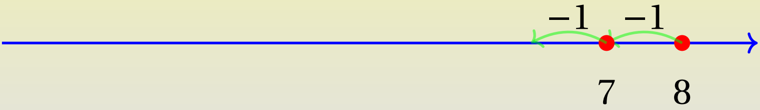
$$a + 0 = 0 + a = a$$

Sottrazione

L'operazione di sottrazione equivale a ripetere più volte l'operazione di precedente.
Ad esempio $8-5=3$:

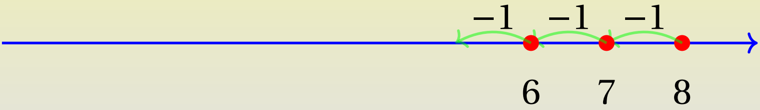


L'operazione di sottrazione equivale a ripetere più volte l'operazione di precedente.
Ad esempio $8 - 5 = 3$:



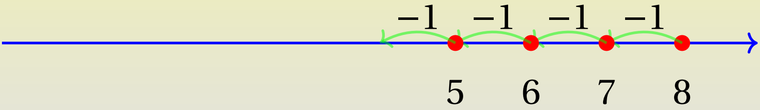
Sottrazione

L'operazione di sottrazione equivale a ripetere più volte l'operazione di precedente.
Ad esempio $8 - 5 = 3$:



Sottrazione

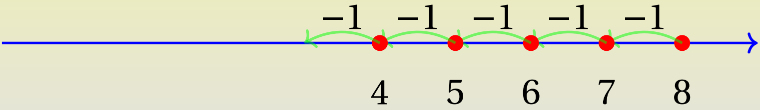
L'operazione di sottrazione equivale a ripetere più volte l'operazione di precedente.
Ad esempio $8-5=3$:



Sottrazione

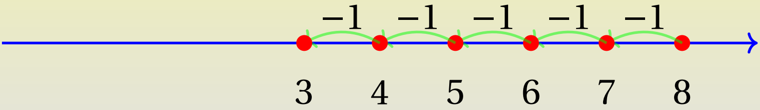
L'operazione di sottrazione equivale a ripetere più volte l'operazione di precedente.

Ad esempio $8 - 5 = 3$:



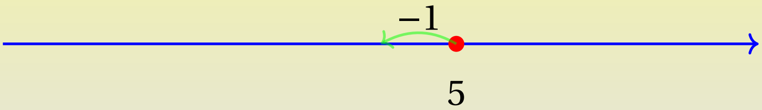
Sottrazione

L'operazione di sottrazione equivale a ripetere più volte l'operazione di precedente.
Ad esempio $8-5=3$:



Sottrazione

Non sempre è possibile effettuare l'operazione di sottrazione nell'insieme dei numeri naturali.
Ad esempio $5 - 8 = ?$:

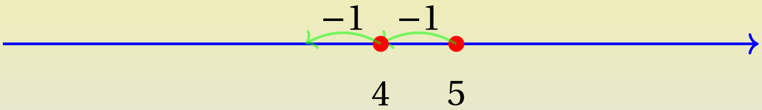


Per ovviare a questo più avanti definiremo l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi.

$\mathbb{N}$

Sottrazione

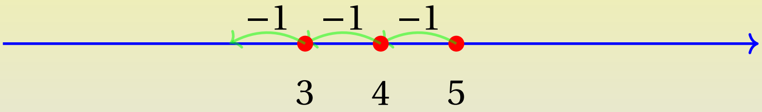
Non sempre è possibile effettuare l'operazione di sottrazione nell'insieme dei numeri naturali.
Ad esempio $5-8=?$:



Per ovviare a questo più avanti definiremo l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi.

Sottrazione

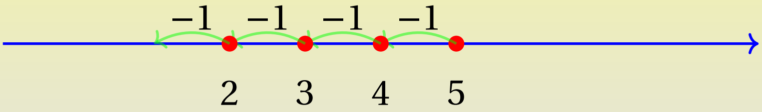
Non sempre è possibile effettuare l'operazione di sottrazione nell'insieme dei numeri naturali.
Ad esempio $5-8=?$:



Per ovviare a questo più avanti definiremo l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi.

Sottrazione

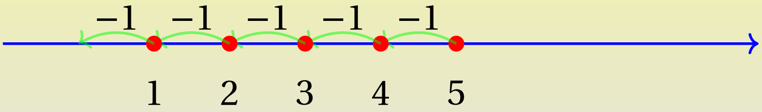
Non sempre è possibile effettuare l'operazione di sottrazione nell'insieme dei numeri naturali.
Ad esempio $5-8=?$:



Per ovviare a questo più avanti definiremo l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi.

Sottrazione

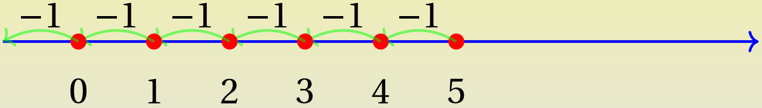
Non sempre è possibile effettuare l'operazione di sottrazione nell'insieme dei numeri naturali.
Ad esempio $5-8=?$:



Per ovviare a questo più avanti definiremo l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi.

Sottrazione

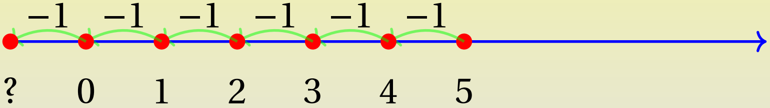
Non sempre è possibile effettuare l'operazione di sottrazione nell'insieme dei numeri naturali.
Ad esempio $5 - 8 = ?$:



Per ovviare a questo più avanti definiremo l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi.

Sottrazione

Non sempre è possibile effettuare l'operazione di sottrazione nell'insieme dei numeri naturali.
Ad esempio $5-8=?$:

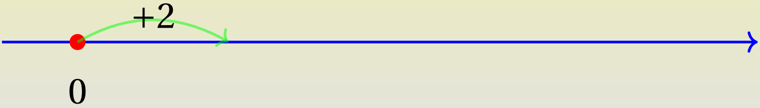


Per ovviare a questo più avanti definiremo l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi.

$\mathbb{N}$

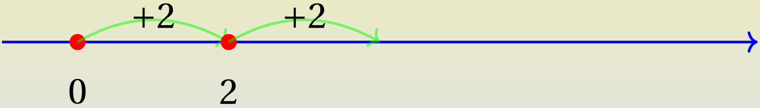
Moltiplicazione

La moltiplicazione è una ripetizione dell'operazione di addizione.
A esempio $2 \cdot 3 = 6$:



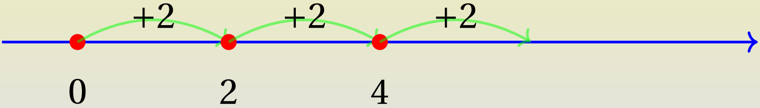
Moltiplicazione

La moltiplicazione è una ripetizione dell'operazione di addizione.
A esempio $2 \cdot 3 = 6$:



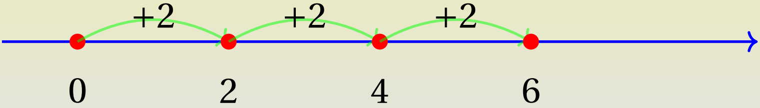
Moltiplicazione

La moltiplicazione è una ripetizione dell'operazione di addizione.
A esempio $2 \cdot 3 = 6$:



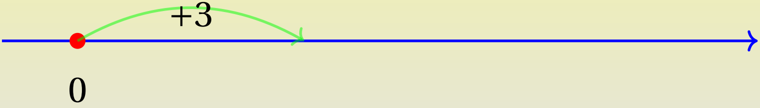
Moltiplicazione

La moltiplicazione è una ripetizione dell'operazione di addizione.
A esempio $2 \cdot 3 = 6$:



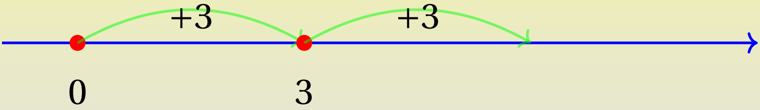
Moltiplicazione

Oppure equivalentemente $3 \cdot 2 = 6$:

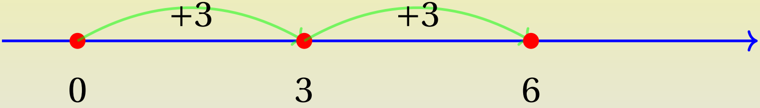


Moltiplicazione

Oppure equivalentemente $3 \cdot 2 = 6$:



Oppure equivalentemente $3 \cdot 2 = 6$:



Moltiplicazione

Proprietà di cui gode la moltiplicazione:

Moltiplicazione - proprietà associativa

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Moltiplicazione

Proprietà di cui gode la moltiplicazione:

Moltiplicazione - proprietà associativa

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Moltiplicazione - proprietà commutativa

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$\mathbb{N}$ Moltiplicazione

Proprietà di cui gode la moltiplicazione:

Moltiplicazione - proprietà associativa

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Moltiplicazione - proprietà commutativa

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Moltiplicazione - neutro

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Moltiplicazione

Proprietà di cui gode la moltiplicazione:

Moltiplicazione - proprietà associativa

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Moltiplicazione - proprietà commutativa

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Moltiplicazione - neutro

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Moltiplicazione - annullamento del prdotto

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

Addizione e moltiplicazione

Addizione e moltiplicazione godono di proprietà che le interconnettono.

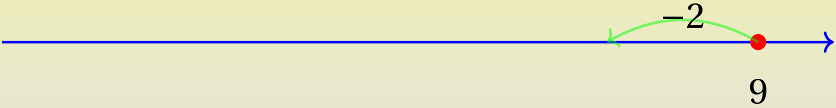
Proprietà distributiva

$$(a+b)\,c = a\,c + b\,c$$

$$a\,(b+c) = a\,b + a\,c$$

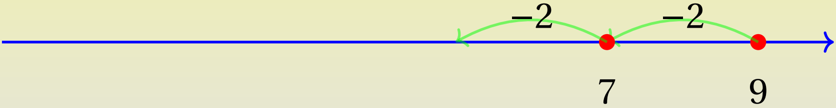
Divisione

La divisione ci dice quante volte al massimo è possibile ripetere l'operazione di sottrazione. Ad esempio $9 : 2 = 4,$ resto 1:



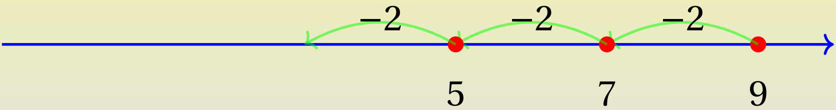
Divisione

La divisione ci dice quante volte al massimo è possibile ripetere l'operazione di sottrazione. Ad esempio $9:2=4$, resto 1:



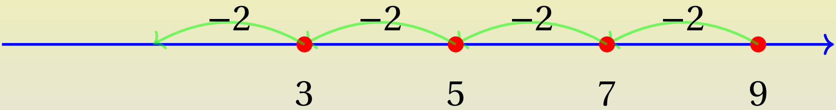
Divisione

La divisione ci dice quante volte al massimo è possibile ripetere l'operazione di sottrazione. Ad esempio $9:2=4$, resto 1:



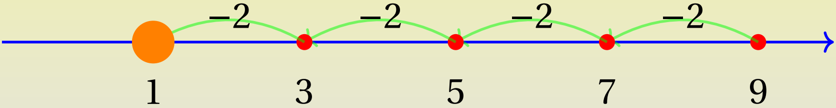
Divisione

La divisione ci dice quante volte al massimo è possibile ripetere l'operazione di sottrazione. Ad esempio $9:2=4$, resto 1:



Divisione

La divisione ci dice quante volte al massimo è possibile ripetere l'operazione di sottrazione. Ad esempio $9 : 2 = 4$, resto 1:



Divisione

Formalmente la divisione tra numeri naturali, $a : b$, si definisce come la ricerca della coppia q (quoziente) e r (resto) tale per cui $a = bq + r$ con $r < b$.

Divisibilità

a si dice divisibile per b se il resto della divisione $a : b$ è 0.

ATTENZIONE: scritture del tipo $a : 0$ risultano non definite (sono cioè prive di significato)!

$0 : a$ con $a \neq 0$ da come risultato 0 con resto 0.

Potenze

Definiamo le potenze come: $a^b = \underbrace{a \cdots a}_{b \text{ volte}}$ e $a^0 = 1$, con $a \neq 0$.

Potenze - proprietà

Potenze

Definiamo le potenze come: $a^b = \underbrace{a \cdots a}_{b \text{ volte}}$ e $a^0 = 1$, con $a \neq 0$.

Potenze - proprietà

- $a^b \cdot a^c = \underbrace{a \cdots a}_{b \text{ volte}} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{c \text{ volte}} = \underbrace{a \cdots a}_{b+c \text{ volte}} = a^{b+c}$

Potenze

Definiamo le potenze come: $a^b = \underbrace{a \cdots a}_{b \text{ volte}}$ e $a^0 = 1$, con $a \neq 0$.

Potenze - proprietà

- $a^b \cdot a^c = \underbrace{a \cdots a}_{b \text{ volte}} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{c \text{ volte}} = \underbrace{a \cdots a}_{b+c \text{ volte}} = a^{b+c}$
- $a^b \cdot c^b = \underbrace{a \cdots a}_{b \text{ volte}} \cdot \underbrace{c \cdots c}_{b \text{ volte}} = \underbrace{ac \cdots ac}_{b \text{ volte}} = (ac)^b$

Potenze

Definiamo le potenze come: $a^b = \underbrace{a \cdots a}_{b \text{ volte}}$ e $a^0 = 1$, con $a \neq 0$.

Potenze - proprietà

- $a^b \cdot a^c = \underbrace{a \cdots a}_{b \text{ volte}} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{c \text{ volte}} = \underbrace{a \cdots a}_{b+c \text{ volte}} = a^{b+c}$
- $a^b \cdot c^b = \underbrace{a \cdots a}_{b \text{ volte}} \cdot \underbrace{c \cdots c}_{b \text{ volte}} = \underbrace{ac \cdots ac}_{b \text{ volte}} = (ac)^b$
- $(a^b)^c = \underbrace{a^b \cdots a^b}_{c \text{ volte}} = \underbrace{\underbrace{a \cdots a}_{b \text{ volte}} \cdots \underbrace{a \cdots a}_{b \text{ volte}}}_{c \text{ volte}} = \underbrace{a \cdots a}_{bc \text{ volte}} =$

  a^{bc}

Le proprietà delle potenze valgono (con i necessari cambiamenti e le necessarie attenzioni) anche per la divisione.

Potenze - proprietà

ATTENZIONE: 0^0 è un simbolo privo di significato!

Potenze

Le proprietà delle potenze valgono (con i necessari cambiamenti e le necessarie attenzioni) anche per la divisione.

Potenze - proprietà

- $a^b : a^c = (\underbrace{a \cdots a}_{b \text{ volte}}) : (\underbrace{a \cdots a}_{c \text{ volte}}) = \underbrace{a \cdots a}_{b-c \text{ volte}} = a^{b-c}$

ATTENZIONE: 0^0 è un simbolo privo di significato!

Potenze

Le proprietà delle potenze valgono (con i necessari cambiamenti e le necessarie attenzioni) anche per la divisione.

Potenze - proprietà

- $a^b : a^c = (\underbrace{a \cdots a}_{b \text{ volte}}) : (\underbrace{a \cdots a}_{c \text{ volte}}) = \underbrace{a \cdots a}_{b-c \text{ volte}} = a^{b-c}$
- $a^b : c^b = (\underbrace{a \cdots a}_{b \text{ volte}}) : (\underbrace{c \cdots c}_{b \text{ volte}}) = \underbrace{(a : c) \cdots (a : c)}_{b \text{ volte}} = (a : c)^b$

ATTENZIONE: 0^0 è un simbolo privo di significato!

Notazione posizionale decimale

La notazione posizionale decimale è la consueta rappresentazione dei numeri che utilizza le dieci cifre arabe (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) posizionate in modo ordinato. Ogni cifra rappresenta una certa quantità di una potenza di 10.

$$n = c_k c_{k-1} \dots c_3 c_2 c_1 c_0 =$$

$$= c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} \dots c_3 10^3 + c_2 10^2 + c_1 10^1 + c_0 10^0$$

Es:$1234 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$

Numeri primi

Un numero si dice primo se è maggiore o uguale a due e divisibile solamente per se stesso e per 1.

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots\}$$

Numeri primi

Un numero si dice primo se è maggiore o uguale a due e divisibile solamente per se stesso e per 1.

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots\}$$

Multipli

Un numero m è multiplo di a se $m = a \cdot b$.
Ad esempio sono multipli di 3:

$$M_3 = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$$

I numeri primi fino a 100 con il crivello di Eratostene:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

I numeri primi fino a 100 con il crivello di Eratostene:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Eliminiamo 1

ℕ Elementi di teoria dei numeri

I numeri primi fino a 100 con il crivello di Eratostene:

	2	3		5		7		9	
11		13		15		17		19	
21		23		25		27		29	
31		33		35		37		39	
41		43		45		47		49	
51		53		55		57		59	
61		63		65		67		69	
71		73		75		77		79	
81		83		85		87		89	
91		93		95		97		99	

e i multipli di 2

I numeri primi fino a 100 con il crivello di Eratostene:

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23		25				29	
31				35		37			
41		43				47		49	
		53		55				59	
61				65		67			
71		73				77		79	
		83		85				89	
91				95		97			

e i multipli di 3

I numeri primi fino a 100 con il crivello di Eratostene:

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47		49	
		53						59	
61						67			
71		73				77		79	
		83						89	
91						97			

e i multipli di 5

I numeri primi fino a 100 con il crivello di Eratostene:

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47			
		53						59	
61						67			
71		73						79	
		83						89	
						97			

e i multipli di 7

I numeri primi fino a 100 con il crivello di Eratostene:

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47			
		53						59	
61						67			
71		73						79	
		83						89	
						97			

e quelli di 11, 13, 17

I numeri primi fino a 100 con il crivello di Eratostene:

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47			
		53						59	
61						67			
71		73						79	
		83						89	
						97			

e quelli di 23, 29,...

Teorema fondamentale dell'aritmetica

Ogni numero naturale tranne lo 0 può essere scritto come prodotto di numeri primi elevati ad una determinata potenza naturale, in formule per ogni numero naturale maggiore o uguale a 1 si ha:

$$n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \ldots$$

Questo modo di scrivere n come prodotto di numeri primi, detto scomposizione in fattori primi, è unico.

Esiste un primo più grande di tutti gli altri?

Ipotizziamo che p_{max} sia il primo maggiore di tutti.
Sia $n = \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdots \cdot p_{max}}_{\text{prodotto di tutti i primi fino a } p_{max}} +1 = a+1$, ci sono solo due alternative:

$$n = \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdots \cdot p_{max}}_{\text{prodotto di tutti i primi fino a } p_{max}} + 1 = a + 1$$

1) se n fosse primo allora sarebbe un primo maggiore di p_{max} ma questo non è possibile se è vera l'ipotesi

$$n = \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdots \cdot p_{max}}_{\text{prodotto di tutti i primi fino a } p_{max}} + 1 = a + 1$$

1) se n fosse primo allora sarebbe un primo maggiore di p_{max} ma questo non è possibile se è vera l'ipotesi

2) se n non fosse primo allora per il teorema fondamentale dell'aritmetica dovrebbe essere divisibile per qualche numero primo $p_i \leq p_{max}$ ma anche questo non può essere perchè si otterrebbe
$$n = (a+1) : p_i = \underbrace{(a : p_i)}_{\text{divisione con resto 0}} + \underbrace{1 : p_i}_{\text{divisione con resto 1}}$$

CONCLUSIONE: L'esistenza di p_{max} porta a due possibili conclusioni, entrambe false. Per questo motivo dobbiamo concludere che **non esiste un** p_{max}.

Il minimo comune multiplo

Il più piccolo multiplo comune tra due naturali si indica con la notazione:

$$mcm(a, b)$$

Se si scompongono in fattori primi sia a che b il loro minimo comune multiplo è il prodotto tra i fattori primi comuni e non comuni, quelli comuni presi una sola volta e con il massimo esponente.

Il massimo comun divisore

Il più grande divisore comune tra due naturali si indica con la notazione:

$$MCD(a, b)$$

Se si scompongono in fattori primi sia a che b il loro massimo comun divisore è il prodotto tra i fattori primi comuni, presi una sola volta e con il minimo esponente.

Algoritmo di Euclide per il $MCD(a, b)$

Un tecnica alternativa per il calcolo del $MCD(a, b)$ si basa sulle proprietà del MCD:

- $MCD(a, b) = MCD(b, a)$

Algoritmo di Euclide per il $MCD(a,b)$

Un tecnica alternativa per il calcolo del $MCD(a,b)$ si basa sulle proprietà del MCD:

- $MCD(a,b) = MCD(b,a)$
- $MCD(c,c) = c$

Algoritmo di Euclide per il $MCD(a,b)$

Un tecnica alternativa per il calcolo del $MCD(a,b)$ si basa sulle proprietà del MCD:

- $MCD(a,b) = MCD(b,a)$
- $MCD(c,c) = c$
- se $a < b$ allora $MCD(a,b) \leq a$

Algoritmo di Euclide per il $MCD(a,b)$

Un tecnica alternativa per il calcolo del $MCD(a,b)$ si basa sulle proprietà del MCD:

- $MCD(a,b) = MCD(b,a)$
- $MCD(c,c) = c$
- se $a < b$ allora $MCD(a,b) \leq a$
- se $a < b$ allora $k = MCD(a,b) = MCD(a,b-a)$, vera ricordando che se $a = k \cdot x$ e $b = k \cdot y$ allora $b - a = k(y - x)$.

Esempio: algoritmo di Euclide per il $MCD(315, 42)$

$$MCD(315, 42) = MCD(315 - 42, 42) =$$

Esempio: algoritmo di Euclide per il $MCD(315,42)$

$$MCD(315,42) = MCD(315-42,42) =$$

$$= MCD(273,42) = MCD(273-42,42) =$$

Esempio: algoritmo di Euclide per il $MCD(315, 42)$

$$MCD(315, 42) = MCD(315 - 42, 42) =$$

$$= MCD(273, 42) = MCD(273 - 42, 42) =$$

$$= MCD(231, 42) = MCD(231 - 42, 42) =$$

Esempio: algoritmo di Euclide per il $MCD(315, 42)$

$$MCD(315, 42) = MCD(315 - 42, 42) =$$

$$= MCD(273, 42) = MCD(273 - 42, 42) =$$

$$= MCD(231, 42) = MCD(231 - 42, 42) =$$

$$= MCD(189, 42) = MCD(189 - 42, 42) =$$

Esempio: algoritmo di Euclide per il $MCD(315, 42)$

$$MCD(315, 42) = MCD(315 - 42, 42) =$$

$$= MCD(273, 42) = MCD(273 - 42, 42) =$$

$$= MCD(231, 42) = MCD(231 - 42, 42) =$$

$$= MCD(189, 42) = MCD(189 - 42, 42) =$$

$$= MCD(147, 42) = MCD(147 - 42, 42) =$$

$$= MCD(147, 42) = MCD(147 - 42, 42) =$$

$$= MCD(105, 42) = MCD(105 - 42, 42) =$$

$$= MCD(147, 42) = MCD(147 - 42, 42) =$$

$$= MCD(105, 42) = MCD(105 - 42, 42) =$$

$$= MCD(63, 42) = MCD(63 - 42, 42) =$$

$$= MCD(147, 42) = MCD(147 - 42, 42) =$$

$$= MCD(105, 42) = MCD(105 - 42, 42) =$$

$$= MCD(63, 42) = MCD(63 - 42, 42) =$$

$$= MCD(21, 42) = MCD(21, 42 - 21) =$$

$$= MCD(147,42) = MCD(147-42,42) =$$

$$= MCD(105,42) = MCD(105-42,42) =$$

$$= MCD(63,42) = MCD(63-42,42) =$$

$$= MCD(21,42) = MCD(21,42-21) =$$

$$= MCD(21,21) = 21$$

MCD e mcm tra due numeri naturali

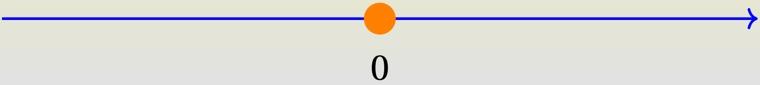
Se si calcolano MCD e mcm tra <u>due soli</u> numeri naturali vale la relazione:

$$\underbrace{MCD(a,b)}_{\text{primi comuni con esp min}} \cdot \underbrace{mcm(a,b)}_{\text{primi non comuni, primi comuni con esp max}} =$$

$$= \underbrace{ab}_{\text{primi comuni con esp max e min, primi non comuni}}$$

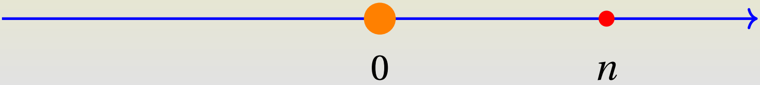
$\mathbb{Z}$

Estendiamo l'insieme dei numeri naturali definendo l'insieme dei numeri interi, $\mathbb{Z}$. Definiamo l'opposto di un numero $n \in \mathbb{N}$ come il numero $-n$ che mantiene la medesima distanza dallo 0 trovandosi dall'altra parte rispetto ad esso sulla retta numerica.



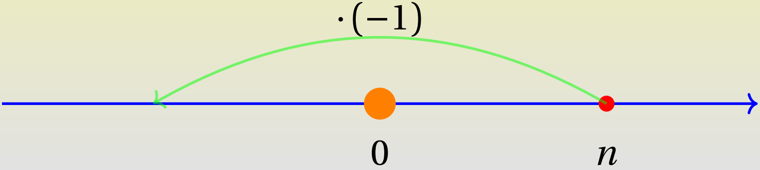
$\mathbb{Z}$

Estendiamo l'insieme dei numeri naturali definendo l'insieme dei numeri interi, $\mathbb{Z}$. Definiamo l'opposto di un numero $n \in \mathbb{N}$ come il numero $-n$ che mantiene la medesima distanza dallo 0 trovandosi dall'altra parte rispetto ad esso sulla retta numerica.



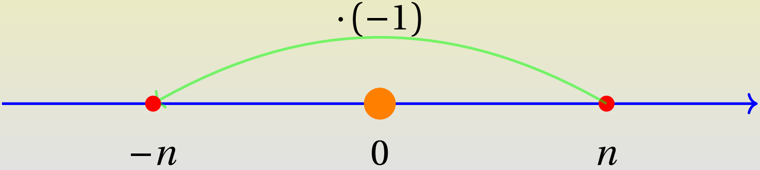
$\mathbb{Z}$

Estendiamo l'insieme dei numeri naturali definendo l'insieme dei numeri interi, $\mathbb{Z}$. Definiamo l'opposto di un numero $n \in \mathbb{N}$ come il numero $-n$ che mantiene la medesima distanza dallo 0 trovandosi dall'altra parte rispetto ad esso sulla retta numerica.

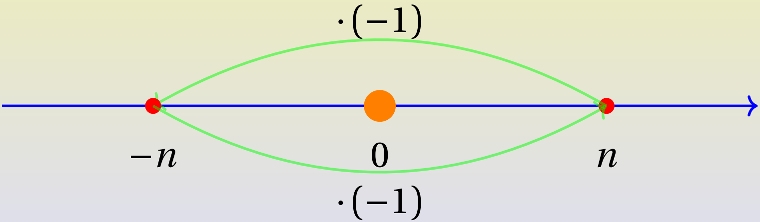


$\mathbb{Z}$

Estendiamo l'insieme dei numeri naturali definendo l'insieme dei numeri interi, $\mathbb{Z}$. Definiamo l'opposto di un numero $n \in \mathbb{N}$ come il numero $-n$ che mantiene la medesima distanza dallo 0 trovandosi dall'altra parte rispetto ad esso sulla retta numerica.



Estendiamo l'insieme dei numeri naturali definendo l'insieme dei numeri interi, $\mathbb{Z}$. Definiamo l'opposto di un numero $n \in \mathbb{N}$ come il numero $-n$ che mantiene la medesima distanza dallo 0 trovandosi dall'altra parte rispetto ad esso sulla retta numerica.



Opposto

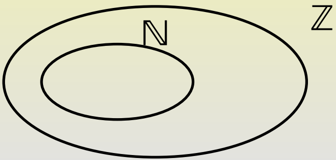
L'opposto di un numero z è un numero che sommato a z da zero.

$$z + p = p + z = 0$$

Indichiamo l'opposto p di z con il simbolo $-z$.

$\mathbb{Z}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$



Valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Il valore assoluto gode delle seguenti proprietà:

Valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Il valore assoluto gode delle seguenti proprietà:

- $|a| \geq 0$

Valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Il valore assoluto gode delle seguenti proprietà:

- $|a| \geq 0$
- $|a| + |b| \geq |a + b|$

Valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Il valore assoluto gode delle seguenti proprietà:

- $|a| \geq 0$
- $|a| + |b| \geq |a + b|$
- $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$

Valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Il valore assoluto gode delle seguenti proprietà:

- $|a| \geq 0$
- $|a| + |b| \geq |a + b|$
- $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$
- $\left|a^2\right| = |a|^2 = a^2$

Addizione

L'addizione tra numeri interi mantiene le medesime proprietà formali dell'addizione tra numeri naturali e ricomprende anche la sottrazione tra naturali.

Addizione e sottrazione in $\mathbb{Z}$

$$a - b = a + (-b)$$

$$a - b = -(b - a)$$

Moltiplicazione

Un positivo è un numero $x > 0$, un negativo è un $x < 0$. Zero non è nè positivo nè negativo.

Opposti e opposti di opposti

Per quanto visto prima si ha che:

$$(-a) \cdot b = (-1) \cdot a \cdot b = -ab$$

$$a \cdot (-b) = a \cdot (-1) \cdot b = -ab$$

$$(-a) \cdot (-b) = (-1) \cdot a \cdot (-1) \cdot b = ab$$

Moltiplicazione

Regola dei segni

In sintesi si ha che il segno del prodotto di due fattori dipende dal segno dei singoli fattori così come indicato nella tabella:

$\cdot$	$+$	-
$+$	$+$	-
-	-	$+$

Potenze

Per le potenze valgono le medesime proprietà formali già elencate per i numeri naturali. Se n è naturale e z è intero allora, in conseguenza della regola dei segni si ha:

- potenze ad esponente pari

$$(-z)^{2n} = z^{2n} \geq 0$$

Potenze

Per le potenze valgono le medesime proprietà formali già elencate per i numeri naturali. Se n è naturale e z è intero allora, in conseguenza della regola dei segni si ha:

- potenze ad esponente pari

$$(-z)^{2n} = z^{2n} \geq 0$$

- potenze ad esponente dispari

$$(-z)^{2n+1} = -z^{2n+1}$$

Potenze

Per le potenze valgono le medesime proprietà formali già elencate per i numeri naturali. Se n è naturale e z è intero allora, in conseguenza della regola dei segni si ha:

- potenze ad esponente pari

$$(-z)^{2n} = z^{2n} \geq 0$$

- potenze ad esponente dispari

$$(-z)^{2n+1} = -z^{2n+1}$$

Potenze con esponente intero

Definiremo le potenze con esponente intero dopo aver definito i numeri razionali, $\mathbb{Q}$.

L'insieme dei numeri razionali ($\mathbb{Q}$) è una estensione dell'insieme dei numeri interi. Una frazione è una coppia di numeri interi a, b sulla quale si definiscono le operazioni di somma, sottrazione, prodotto, divisione e potenza che mantengono le stesse proprietà formali delle operazioni precedentemente definite.

Frazioni e proprietà invariantiva

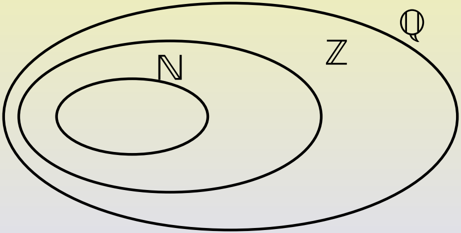
$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$$

con

$$a \in \mathbb{Z}, \text{ e, } b, k \in \mathbb{Z}_0 = \{z \in \mathbb{Z} : z \neq 0\}$$

$\mathbb{Q}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$



$\mathbb{Q}$ Confronto tra frazioni

Due frazioni sono confrontabili tra loro se hanno lo stesso denominatore, per effettuare il confronto si usa la proprietà invariantiva.

$$\begin{array}{ccc} \frac{a}{b} & <=> & \frac{c}{d} \\ \frac{ad}{bd} & <=> & \frac{cb}{db} \end{array}$$

con $a, c \in \mathbb{Z}$, e, $b, d \in \mathbb{Z}_0$

Addizione

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

con

$$a, c \in \mathbb{Z}, \text{ e, } b, d \in \mathbb{Z}_0$$

L'addizione tra due frazioni si effettua se le frazioni hanno il medesimo denominatore, per per effettuare l'operazione si usa la proprietà invariantiva.

Sottrazione

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

con

$$a, c \in \mathbb{Z}, \text{ e, } b, d \in \mathbb{Z}_0$$

La sottrazione tra due frazioni si effettua se le frazioni hanno il medesimo denominatore, per per effettuare l'operazione si usa la proprietà invariantiva.

$\mathbb{Q}$

Moltiplicazione

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

con

$$a, c \in \mathbb{Z}, \text{ e, } b, d \in \mathbb{Z}_0$$

Reciproco o inverso

$$\frac{a}{b} \cdot r = r \cdot \frac{a}{b} = 1$$

con $a, b \in \mathbb{Z}_0$
$\frac{b}{a} = r$ è il reciproco di $\frac{a}{b}$.

0 non ammette reciproco!

Divisione

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

con

$$a \in \mathbb{Z}, \text{ e, } b, c, d \in \mathbb{Z}_0$$

Dividere per $\frac{c}{d}$ equivale a moltiplicare per il reciproco, cioè equivale a moltiplicare per $\frac{d}{c}$.

Sulle frazioni valgono tutte le proprietà formali precedentemente introdotte e le seguenti:

- $$\left(\frac{a}{b}\right)^z = \frac{a^z}{b^z}$$

il che consente di dare significato agli esponenti interi.

Potenze

Sulle frazioni valgono tutte le proprietà formali precedentemente introdotte e le seguenti:

- $$\left(\frac{a}{b}\right)^z = \frac{a^z}{b^z}$$
- $$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

il che consente di dare significato agli esponenti interi.

Notazione posizionale decimale

$$\frac{a}{b} = \underbrace{c_k c_{k-1} \ldots c_3 c_2 c_1 c_0}_{\text{parte intera}}, \underbrace{c_{-1} c_{-2} \ldots c_{-h}}_{\text{parte decimale}} =$$

$$= c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} \cdots + c_0 10^0 + c_{-1} \cdot 10^{-1} \ldots c_{-h} \cdot 10^{-h}$$

Es: $12,345 = 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$

Dalla notazione decimale posizionale alle corrispondenti frazioni:

Es. decimali limitati

$$123,456789 = \frac{123456789}{1000000}$$

Notazione posizionale decimale

Dalla notazione decimale posizionale alle corrispondenti frazioni:

Es. decimali limitati

$$123,456789 = \frac{123456789}{1000000}$$

Es. decimali periodici

$$123,4567\overline{89} = \frac{123456789 - 1234567}{990000}$$

Il simbolo di %

Il simbolo di percentuale, %, è un simbolo che può generare qualche problema per la traduzione dal linguaggio naturale a quello matematico.

“x per cento”, “x %”	$\frac{x}{100}$
“y è aumentato di x per cento”	$y\left(1+\frac{x}{100}\right)$
“y è diminuito di x per cento”	$y\left(1-\frac{x}{100}\right)$

Un particolare modo di scrivere i numeri è la notazione scientifica, che prevede di scrivere un numero come:

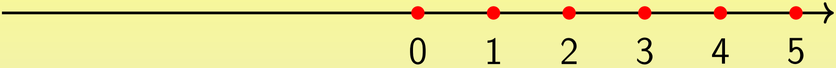
$$\pm a \cdot 10^k$$

con $1 \leq a < 10$

La massa del sole in kilogrammi

$$1990000000000000000000000000000 = 1,99 \cdot 10^{30}$$

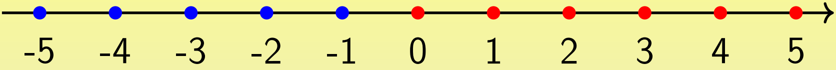
$\mathbb{Q}$ I razionali sulla retta



Tra un intero e il suo successivo non vi sono altri interi ma tra due razionali diversi si trova sempre un terzo razionale tra essi compreso.

ATTENZIONE: anche se i razionali sono distribuiti in modo denso sulla retta, non ne costituiscono la totalità dei punti, rimangono ancora da definire numeri come $\sqrt{2}$ oppure π dei quali tratteremo più avanti.

$\mathbb{Q}$ I razionali sulla retta

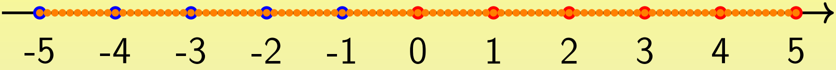


Tra un intero e il suo successivo non vi sono altri interi ma tra due razionali diversi si trova sempre un terzo razionale tra essi compreso.

ATTENZIONE: anche se i razionali sono distribuiti in modo denso sulla retta, non ne costituiscono la totalità dei punti, rimangono ancora da definire numeri come $\sqrt{2}$ oppure π dei quali tratteremo più avanti.

$\mathbb{Q}$

I razionali sulla retta



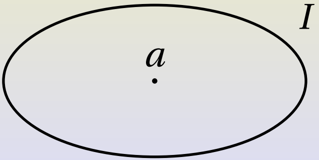
Tra un intero e il suo successivo non vi sono altri interi ma tra due razionali diversi si trova sempre un terzo razionale tra essi compreso.
ATTENZIONE: anche se i razionali sono distribuiti in modo denso sulla retta, non ne costituiscono la totalità dei punti, rimangono ancora da definire numeri come $\sqrt{2}$ oppure π dei quali tratteremo più avanti.

Insiemi

Un insieme è una collezione di oggetti che chiamiamo elementi. Perché un insieme sia tale deve sempre essere possibile stabile se un certo elemento appartiene o non appartiene all'insieme stesso. In simboli, essendo a un certo elemento e I un dato insieme, si ha che:
$a \in I$ oppure $a \notin I$.

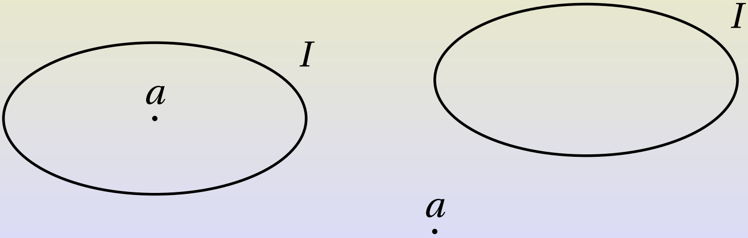
Insiemi

Un insieme è una collezione di oggetti che chiamiamo elementi. Perché un insieme sia tale deve sempre essere possibile stabile se un certo elemento appartiene o non appartiene all'insieme stesso. In simboli, essendo a un certo elemento e I un dato insieme, si ha che:
$a \in I$ oppure $a \notin I$.



Insiemi

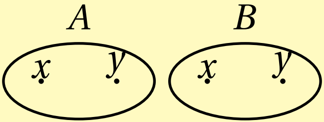
Un insieme è una collezione di oggetti che chiamiamo elementi. Perché un insieme sia tale deve sempre essere possibile stabile se un certo elemento appartiene o non appartiene all'insieme stesso. In simboli, essendo a un certo elemento e I un dato insieme, si ha che:
$a \in I$ oppure $a \notin I$.



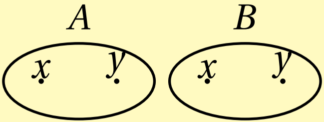
Insiemi uguali

Insiemi uguali

Insiemi uguali



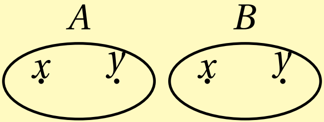
Insiemi uguali



Due insiemi che contengono gli stessi elementi si dicono uguali.

$$A = B$$

Insiemi uguali

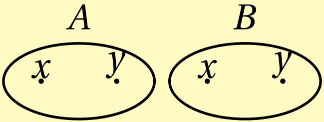


Due insiemi che contengono gli stessi elementi si dicono uguali.

$$A = B$$

Sottoinsiemi

Insiemi uguali

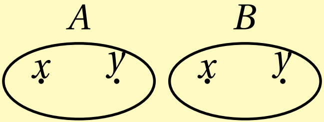


Due insiemi che contengono gli stessi elementi si dicono uguali.

$$A = B$$

Sottoinsiemi

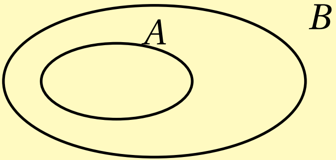
Insiemi uguali



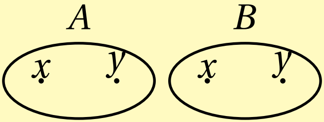
Due insiemi che contengono gli stessi elementi si dicono uguali.

$$A = B$$

Sottoinsiemi



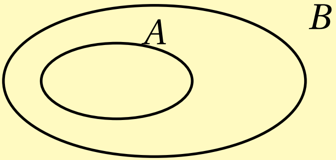
Insiemi uguali



Due insiemi che contengono gli stessi elementi si dicono uguali.

$$A = B$$

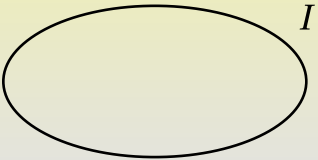
Sottoinsiemi



Se tutti gli elementi di A sono contenuti in B si dice che A è sottoinsieme di B.

$$A \subseteq B \text{ oppure } A \subset B$$

Un insieme privo di elementi si dice vuoto. Il simbolo con cui indichiamo un insieme vuoto è $I = \emptyset$.



Elencazione

Possiamo definire un insieme che contiene un numero finito di elementi elencando gli elementi dell'insieme:

$$I = \{a, e, i, o, u\}$$

Elencazione

Possiamo definire un insieme che contiene un numero finito di elementi elencando gli elementi dell'insieme:

$$I = \{a, e, i, o, u\}$$

Elencazione

Possiamo definire un insieme che contiene un numero finito di elementi elencando gli elementi dell'insieme:

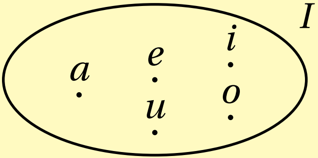
$$I = \{a, e, i, o, u\}$$

Caratteristica

Possiamo definire un insieme caratterizzando gli elementi contenuti in esso:

$$I = \{x \in \text{“lettere dell'alfabeto”} | x \text{ “è una vocale”}\}$$

Diagrammi di Eulero-Venn



Alla luce della rappresentazione per elencazione l'insieme vuoto si può indicare con i simboli:

$$\emptyset = \{\}$$

La cardinalità di un insieme è il numero degli elementi che appartengono all'insieme stesso, indichiamo la cardinalità di un insieme A con il simbolo $|A|$.

Esempi di insiemi e loro cardinalità:

$$A = \{a, e, i, o, u\} \rightarrow |A| = 5$$

$$B = \{b \in \mathbb{Z} | -1 \leq b < 3\} \rightarrow |B| = 4$$

$$C = \emptyset \rightarrow |C| = 0$$

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0 \text{ (aleph-zero)}$$

Due insiemi A e B hanno la stessa cardinalità se è possibile abbinare in modo univoco ad ogni elemento di A un elemento di B e vice versa.

Insieme delle parti di A

L'insieme delle parti dell'insieme A è l'insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di A e si indica con il simbolo $P(A)$.

Ad esempio:

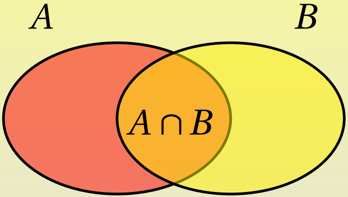
$$A = \emptyset \to P(A) = \{\emptyset\} \to |P(A)| = 1$$

$$B = \{a\} \to P(B) = \{\emptyset, \{a\}\} \to |P(B)| = 2$$

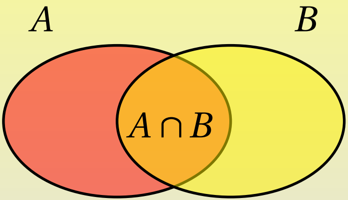
$$C = \{a, b\} \to P(C) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \to |P(C)| = 4$$

In generale se $|D| = n$ allora $|P(D)| = 2^n$.

Due insiemi tali per cui $A \cap B = \emptyset$ si dicono disgiunti.



Due insiemi tali per cui $A \cap B = \emptyset$ si dicono disgiunti.

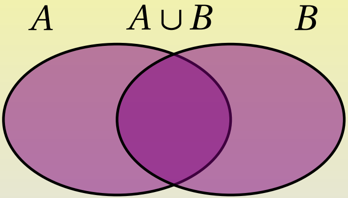


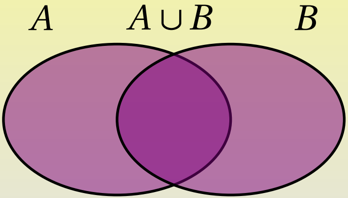
L'insieme A intersecato con l'insieme B ($A \cap B$) contiene gli elementi che appartengono sia ad A che a B.

Due insiemi tali per cui $A \cap B = \emptyset$ si dicono disgiunti.

Unione

Unione





L'insieme A unito con l'insieme B ($A \cup B$) contiene tutti gli elementi che appartengono ad A e tutti quelli che appartengono a B.

Partizione di A

Gli insiemi $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$ formano una partizione di A se:

Partizione di A

Gli insiemi $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$ formano una partizione di A se:

- $A_i \neq \emptyset$

Partizione di A

Gli insiemi $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$ formano una partizione di A se:

- $A_i \neq \emptyset$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$

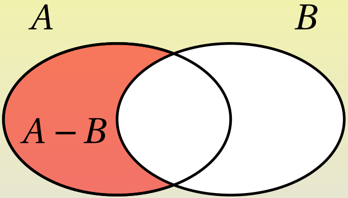
Partizione di A

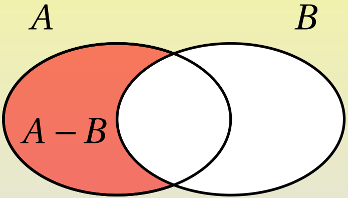
Gli insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ formano una partizione di A se:

- $A_i \neq \emptyset$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$
- $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_i \cup \cdots \cup A_n$

Differenza

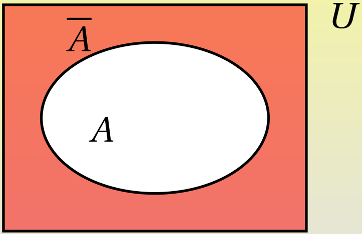
Differenza



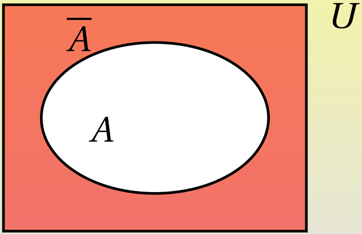


L'insieme $A - B$ contiene tutti gli elementi che appartengono ad A ma non appartengono a B.

Complementare



Complementare

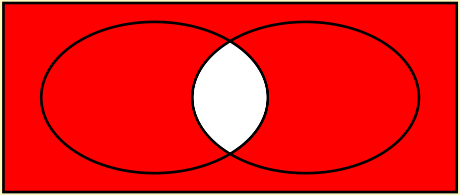


Dato un insieme universo U si chiama complementare di A l'insieme $U - A$. Il complementare di A si indica con il simbolo $\overline{A}$.

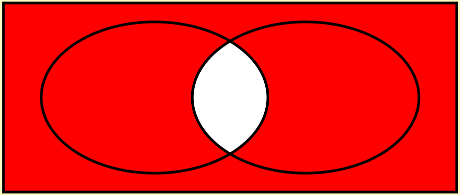
Prima legge di De Morgan

Prima legge di De Morgan

Prima legge di De Morgan

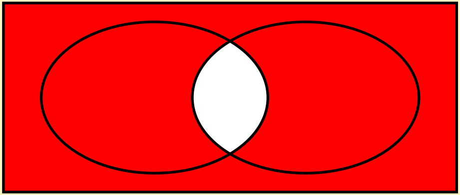


Prima legge di De Morgan



$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Prima legge di De Morgan

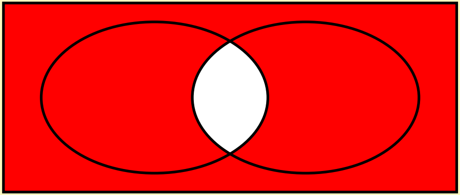


$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Seconda legge di De Morgan

Leggi di De Morgan

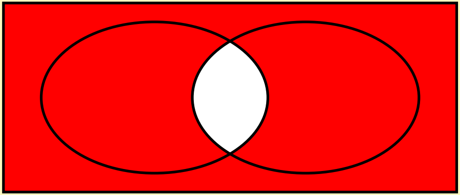
Prima legge di De Morgan



$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

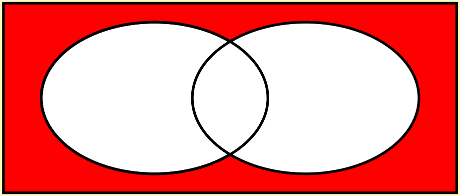
Seconda legge di De Morgan

Prima legge di De Morgan

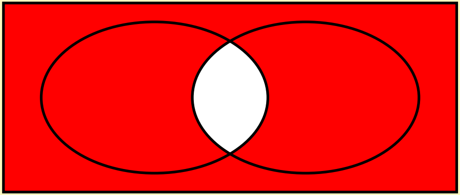


$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Seconda legge di De Morgan

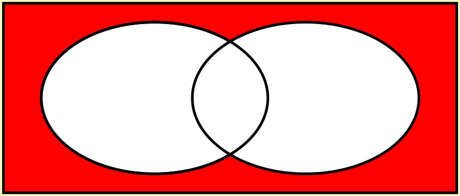


Prima legge di De Morgan



$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Seconda legge di De Morgan



$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Coppia ordinata

É costituita da due elementi a e b, a è il primo elemento della coppia, b è il secondo. Si indica con il simbolo (a, b). In generale $(a, b) \neq (b, a)$ a meno che sia $a = b$.

Coppia ordinata

É costituita da due elementi a e b, a è il primo elemento della coppia, b è il secondo. Si indica con il simbolo (a, b). In generale $(a, b) \neq (b, a)$ a meno che sia $a = b$.

Prodotto cartesiano

Se $a \in A$ e $b \in B$ si definisce il prodotto cartesiano tra gli insiemi A e B come:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

cioè l'insieme di tutte le coppie ordinate con primo elemento dall'insieme A e il secondo dall'insieme B.

Prodotto cartesiano

$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{a, b, c\}$$

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

Prodotto cartesiano e tabelle a doppia entrata

$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{a, b, c\}$$

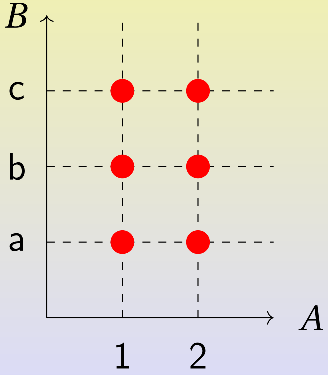
$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

	a	b	c
1	$(1, a)$	$(1, b)$	$(1, c)$
2	$(2, a)$	$(2, b)$	$(2, c)$

Prodotto cartesiano e diagramma cartesiano

$$A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}$$

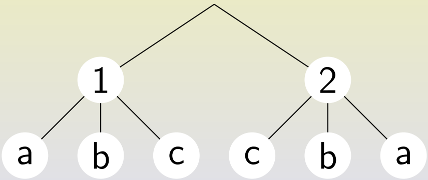
$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$



Prodotto cartesiano e diagramma ad albero

$$A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}$$

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$



Logica

La logica è lo studio del ragionamento e dell'argomentazione, che si occupa in particolare di chiarire la correttezza dei procedimenti argomentativi del pensiero.
La matematica adotta un linguaggio formale privo di ambiguità tramite il quale si possano realizzare ragionamenti tecnici interpretabili in modo univoco sia dagli esseri umani che dalle macchine.
La logica formale matematica è sia uno strumento indispensabile per l'elaborazione del ragionamento sia la base per la costruzione di linguaggi informatici.

Proposizione

Una proposizione è una affermazione alla quale si può attribuire un valore di verità vero (V) oppure falso (F).

Es.: "$3 > 1$" VERA
"$5 = 2$" FALSA

Es.: $p(x)$: "$x + 1 > 0$" VERA se $x > -1$,
FALSA se $x \leq -1$.

Proposizione

Una proposizione è una affermazione alla quale si può attribuire un valore di verità vero (V) oppure falso (F).

Es.: "$3 > 1$" VERA
"$5 = 2$" FALSA

Enunciato aperto (o predicato)

É una affermazione che dipende da una variabile e alla quale si può attribuire un valore di verità (V o F) a seconda del valore assunto dalla variabile stessa.

Es.: $p(x)$: "$x + 1 > 0$" VERA se $x > -1$,
FALSA se $x \leq -1$.

Il connettivo logico “non”

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

Es.
p: “Il cielo è azzurro.”
$\overline{p}$: “Il cielo non è azzurro.”

Il connettivo logico “e”

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Es.

p: “Il cielo è azzurro.”

q: “Il cielo è bianco.”

$p \wedge q$: “Il cielo è azzurro e bianco.”

Il connettivo logico "o"

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Es.

p: "Il cielo è azzurro."

q: "Il cielo è bianco."

$p \vee q$: "Il cielo è azzurro o bianco."

Il connettivo logico "implica" o "se …allora"

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Es.

p: "Il cielo è azzurro."

q: "Il cielo è sereno."

$p \Rightarrow q$: "Se il cielo è azzurro allora è sereno."

Il connettivo logico "se e solo se"

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Es.

p: "Il cielo è sereno."

q: "Il cielo è senza nuvole."

$p \Leftrightarrow q$: "Il cielo è sereno se e solo se è senza nuvole."

Per ogni

Il quantificatore “per ogni”, $\forall$

Es.: $x + 5 > 0$ è vera $\forall x \in \mathbb{N}$.

Il quantificatore "esiste", $\exists$

Es.: $\exists x \in \mathbb{Z}$ per cui sia vera $x + 5 > 0$.

Le leggi di De Morgan per la logica

$$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$$

$$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$$

Insiemi e logica

$$A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\}$$

$$\overline{A} = \{x \in U : x \notin A\}$$

Tautologie

Una tautologia o identità o una affermazione sempre vera. Sono tautologie:

- il principio di non contraddizione: $\overline{p \wedge \overline{p}}$

Tautologie

Una tautologia o identità o una affermazione sempre vera. Sono tautologie:

- il principio di non contraddizione: $\overline{p \wedge \overline{p}}$
- il principio del terzo escluso: $p \vee \overline{p}$

Relazioni

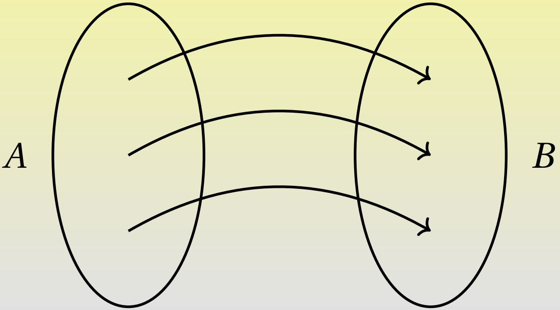
Relazioni

Una relazione $\mathscr{R}$ tra due insiemi A e B è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$. In simboli:

$$\mathscr{R} \subseteq A \times B$$

Relazioni

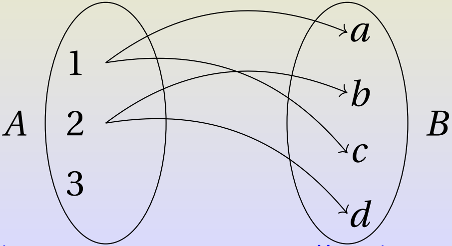
Rappresentazione sagittale di una relazione $\mathscr{R}$ dall'insieme A all'insieme B



una relazione è un collegamento, una regola tra elementi dell'insieme A e elementi dell'insieme B.

Esempio:

Sia A l'insieme dei binari di una piccola stazione $A = \{1, 2, 3\}$ e B l'insieme delle destinazioni dei treni che passano per quella stazione $B = \{a, b, c, d\}$. Una possibile relazione tra questi due insiemi può essere la relazione $\mathscr{R}$ che assegna ai binari le corrispondenti destinazioni.



Tra tutti i possibili abbinamenti binario-destinazione:

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(1,d),(2,a),(2,b),(2,c),(2,d$$

$$(3,a),(3,b),(3,c),(3,d)\}$$

nella stazione considerata i treni passano sui binari seguendo la particolare relazione:

$$\mathscr{R} = \{(1,a),(1,c),(2,b),(2,d)\}$$

Se x e y sono in relazione tramite $\mathscr{R}$ si scrive:

$$x\mathscr{R}y$$

intendendo che la coppia $(x, y) \in \mathscr{R}$.
Se x e y <u>non</u> sono in relazione tramite $\mathscr{R}$ si scrive:

$$x\bar{\mathscr{R}}y$$

intendendo che la coppia $(x, y) \notin \mathscr{R}$.

Ogni relazione $\mathscr{R} \subseteq X \times Y$ può possedere (o non possedere) le seguenti proprietà:

riflessiva $x\mathscr{R}x, \forall x \in X = Y$

Ogni relazione $\mathscr{R} \subseteq X \times Y$ può possedere (o non possedere) le seguenti proprietà:

riflessiva $x\mathscr{R}x, \forall x \in X = Y$

antiriflessiva $x\bar{\mathscr{R}}x, \forall x \in X$

Ogni relazione $\mathscr{R} \subseteq X \times Y$ può possedere (o non possedere) le seguenti proprietà:

riflessiva $x\mathscr{R}x, \forall x \in X = Y$

antiriflessiva $x\bar{\mathscr{R}}x, \forall x \in X$

simmetrica $x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x, \forall x \in X = Y$

Ogni relazione $\mathscr{R} \subseteq X \times Y$ può possedere (o non possedere) le seguenti proprietà:

riflessiva $x\mathscr{R}x, \forall x \in X = Y$

antiriflessiva $x\bar{\mathscr{R}}x, \forall x \in X$

simmetrica $x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x, \forall x \in X = Y$

antisimmetrica $x\mathscr{R}y \Rightarrow y\bar{\mathscr{R}}x, \forall x \in X, y \in Y, x \neq y$

Ogni relazione $\mathscr{R} \subseteq X \times Y$ può possedere (o non possedere) le seguenti proprietà:

riflessiva $x\mathscr{R}x, \forall x \in X = Y$

antiriflessiva $x\bar{\mathscr{R}}x, \forall x \in X$

simmetrica $x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x, \forall x \in X = Y$

antisimmetrica $x\mathscr{R}y \Rightarrow y\bar{\mathscr{R}}x, \forall x \in X, y \in Y, x \neq y$

transitiva $x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}z \Rightarrow x\mathscr{R}z, \forall x, y, z \in X = Y$

Relazione di equivalenza

Una relazione si dice di equivalenza se è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Le relazioni di equivalenza definiscono, tra gli altri, le proprietà del simbolo di "=":

[1] il simbolo di uguale può essere letto da sinistra a destra e da destra a sinistra

[2] è possibile scambiare un elemento con un un altro ad esso equivalente

Relazione di equivalenza

Una relazione si dice di equivalenza se è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Le relazioni di equivalenza definiscono, tra gli altri, le proprietà del simbolo di “$=$”:

riflessiva $x = x$

[1]il simbolo di uguale può essere letto da sinistra a destra e da destra a sinistra

[2]è possibile scambiare un elemento con un un altro ad esso equivalente

Relazione di equivalenza

Una relazione si dice di equivalenza se è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Le relazioni di equivalenza definiscono, tra gli altri, le proprietà del simbolo di "=":

riflessiva $x = x$

simmetrica $x = y \Rightarrow y = x$ [1]

[1] il simbolo di uguale può essere letto da sinistra a destra e da destra a sinistra

[2] è possibile scambiare un elemento con un un altro ad esso equivalente

Relazione di equivalenza

Una relazione si dice di equivalenza se è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Le relazioni di equivalenza definiscono, tra gli altri, le proprietà del simbolo di "=":

riflessiva $x = x$

simmetrica $x = y \Rightarrow y = x$ [1]

transitiva $x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$ [2]

---

[1] il simbolo di uguale può essere letto da sinistra a destra e da destra a sinistra

[2] è possibile scambiare un elemento con un un altro ad esso equivalente

Relazione d'ordine stretto

Una relazione si dice di ordine stretto se è antiriflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Le relazioni d'ordine stretto definiscono, tra gli altri, le proprietà del simbolo di "$>$" (e del simbolo "$<$"):

Relazione d'ordine stretto

Una relazione si dice di ordine stretto se è antiriflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Le relazioni d'ordine stretto definiscono, tra gli altri, le proprietà del simbolo di "$>$" (e del simbolo "$<$"):

antiriflessiva $x \ngtr x$ $(x \nless x)$

Relazione d'ordine stretto

Una relazione si dice di ordine stretto se è antiriflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Le relazioni d'ordine stretto definiscono, tra gli altri, le proprietà del simbolo di "$>$" (e del simbolo "$<$"):

antiriflessiva $x \not> x$ $(x \not< x)$

antisimmetrica $x > y \Rightarrow y \not> x$ $(x < y \Rightarrow y \not< x)$

Relazione d'ordine stretto

Una relazione si dice di ordine stretto se è antiriflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Le relazioni d'ordine stretto definiscono, tra gli altri, le proprietà del simbolo di “>” (e del simbolo “<”):

antiriflessiva $x \not> x \ (x \not< x)$

antisimmetrica $x > y \Rightarrow y \not> x \ (x < y \Rightarrow y \not< x)$

transitiva $x > y \wedge y > z \Rightarrow x > z$
$(x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z)$

Relazione d'ordine largo

Una relazione si dice di ordine largo se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Le relazioni d'ordine largo definiscono, tra gli altri, le proprietà del simbolo di "$\geq$" (e del simbolo "$\leq$"):

Relazione d'ordine largo

Una relazione si dice di ordine largo se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Le relazioni d'ordine largo definiscono, tra gli altri, le proprietà del simbolo di "$\geq$" (e del simbolo "$\leq$"):

riflessiva $x \geq x$ $(x \leq x)$

Relazione d'ordine largo

Una relazione si dice di ordine largo se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Le relazioni d'ordine largo definiscono, tra gli altri, le proprietà del simbolo di "$\geq$" (e del simbolo "$\leq$"):

riflessiva $x \geq x$ $(x \leq x)$

antisimmetrica $x \geq y \Rightarrow y \ngeq x$ se $x \neq y$
$(x \leq y \Rightarrow y \nleq x$ se $x \neq y)$

Relazione d'ordine largo

Una relazione si dice di ordine largo se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Le relazioni d'ordine largo definiscono, tra gli altri, le proprietà del simbolo di "≥" (e del simbolo "≤"):

riflessiva $x \geq x$ $(x \leq x)$

antisimmetrica $x \geq y \Rightarrow y \ngeq x$ se $x \neq y$
$(x \leq y \Rightarrow y \nleq x$ se $x \neq y)$

transitiva $x \geq y \wedge y \geq z \Rightarrow x \geq z$
$(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$

Le funzioni sono particolari relazioni.

Una relazione $\mathscr{R} \subseteq X \times Y$ è una funzione se:

$$\forall x \in X, \forall y_1, y_2 \in Y, x\mathscr{R}y_1 \wedge x\mathscr{R}y_2 \Leftrightarrow y_1 = y_2$$

Le funzioni sono particolari relazioni.

Una relazione $\mathscr{R} \subseteq X \times Y$ è una funzione se:

$$\forall x \in X, \forall y_1, y_2 \in Y, x\mathscr{R}y_1 \wedge x\mathscr{R}y_2 \Leftrightarrow y_1 = y_2$$

Notazione per una funzione:

$$y = f(x) : X \to Y$$

Le funzioni sono particolari relazioni.

Una relazione $\mathscr{R} \subseteq X \times Y$ è una funzione se:

$$\forall x \in X, \forall y_1, y_2 \in Y, x\mathscr{R}y_1 \wedge x\mathscr{R}y_2 \Leftrightarrow y_1 = y_2$$

Notazione per una funzione:

$$y = f(x) : X \to Y$$

- l'insieme X si chiama anche dominio, D

Le funzioni sono particolari relazioni.

Una relazione $\mathscr{R} \subseteq X \times Y$ è una funzione se:

$$\forall x \in X, \forall y_1, y_2 \in Y, x \mathscr{R} y_1 \wedge x \mathscr{R} y_2 \Leftrightarrow y_1 = y_2$$

Notazione per una funzione:

$$y = f(x) : X \to Y$$

- l'insieme X si chiama anche dominio, D
- l'insieme Y si chiama codominio, C

Le funzioni sono particolari relazioni.

Una relazione $\mathscr{R} \subseteq X \times Y$ è una funzione se:

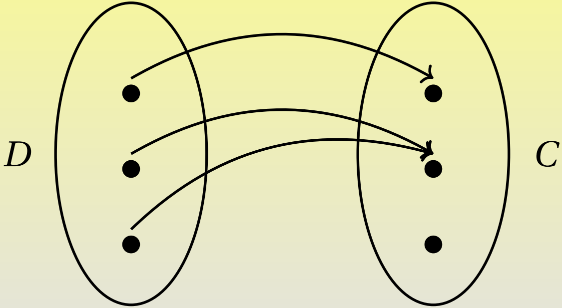
$$\forall x \in X, \forall y_1, y_2 \in Y, x\mathscr{R}y_1 \wedge x\mathscr{R}y_2 \Leftrightarrow y_1 = y_2$$

Notazione per una funzione:

$$y = f(x) : X \to Y$$

- l'insieme X si chiama anche dominio, D
- l'insieme Y si chiama codominio, C
- L'insieme $I = \{y \in C : y = f(x), x \in D\}$ si chiama immagine. In generale $I \subseteq C$.

Rappresentazione sagittale di una funzione $f(x): D \to C$



una funzione è un collegamento, una regola tra elementi dell'insieme dominio, D, e elementi dell'insieme codominio, C, che abbina ad ogni elemento $x \in D$ uno e uno solo elemento $y \in C$.

Una funzione $y = f(x) : D \to C$ può essere (o non essere):

suriettiva $C = I = \{y \in C : y = f(x), x \in D\}$

Una funzione $y = f(x) : D \to C$ può essere (o non essere):

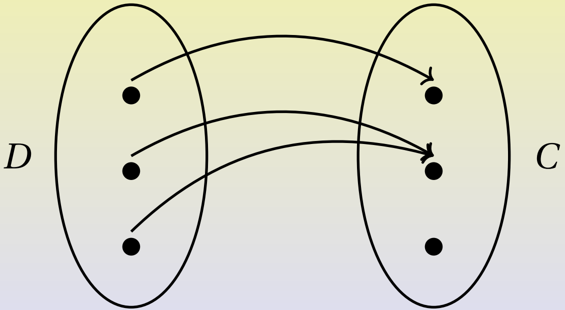
suriettiva $C = I = \{y \in C : y = f(x), x \in D\}$

iniettiva $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

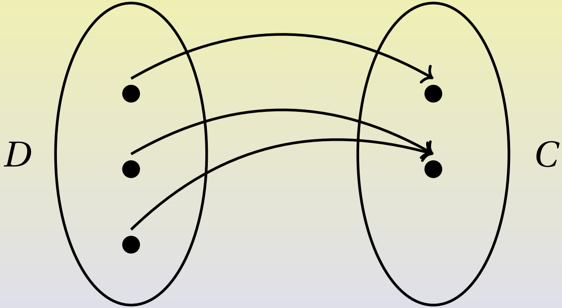
Una funzione $y = f(x) : D \to C$ può essere (o non essere):

- **suriettiva** $C = I = \{y \in C : y = f(x), x \in D\}$
- **iniettiva** $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- **biiettiva** se è sia suriettiva che iniettiva

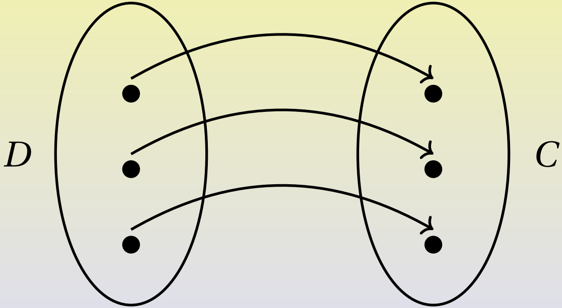
Rappresentazione sagittale di una funzione $f(x): D \to C$ non suriettiva, non iniettiva, non biiettiva:



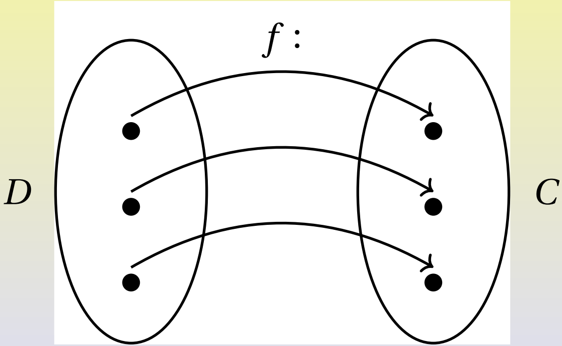
Rappresentazione sagittale di una funzione
$f(x): D \to C$ suriettiva, non iniettiva, non biiettiva:



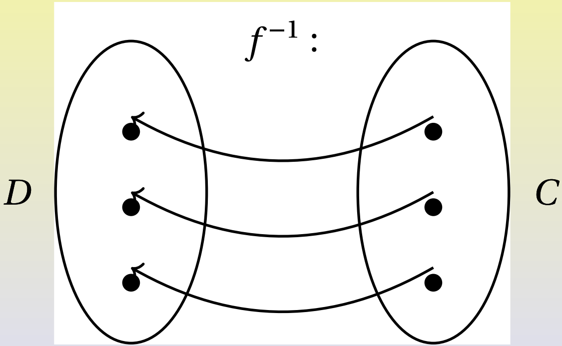
Rappresentazione sagittale di una funzione $f(x): D \to C$ suriettiva, iniettiva, biiettiva:



Le funzioni biiettive ammettono inversa. L'inversa di una funzione $f(x)$ si indica con il simbolo $f^{-1}(x)$.



Le funzioni biiettive ammettono inversa. L'inversa di una funzione $f(x)$ si indica con il simbolo $f^{-1}(x)$.



Esempio 1:

$$y = f(x) = x^2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

- è non suriettiva, infatti gli interi negativi appartengono al codominio della funzione ma non sono immagine di alcun elemento del domino

Esempio 1:

$$y = f(x) = x^2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

- è non suriettiva, infatti gli interi negativi appartengono al codominio della funzione ma non sono immagine di alcun elemento del domino
- è non iniettiva, infatti, ad esempio, $f(3) = f(-3) = 9$

Esempio 2:

$$y = f(x) = x^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

- è non suriettiva, infatti, ad esempio 3 appartiene al codominio ma non all'immagine della funzione

Esempio 2:

$$y = f(x) = x^2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

- è non suriettiva, infatti, ad esempio 3 appartiene al codominio ma non all'immagine della funzione
- è iniettiva, infatti su tutti i naturali è vero che $x_1 \neq x_2 \Rightarrow (x_1)^2 \neq (x_2)^2$

Esempio 3:

$$y = f(x) = 5x : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$

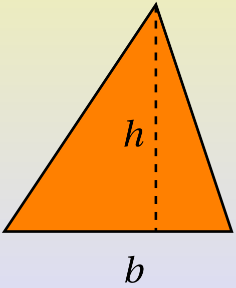
- è suriettiva, infatti tutti gli elementi del codominio sono immagini di qualche elemento del dominio

Esempio 3:

$$y = f(x) = 5x : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$

- è suriettiva, infatti tutti gli elementi del codominio sono immagini di qualche elemento del dominio
- è iniettiva, infatti su tutti i razionali è vero che $x_1 \neq x_2 \Rightarrow 5(x_1) \neq 5(x_2)$

I numeri non bastano per descrivere relazioni, proprietà e quantità.
Per rappresentare una regola o una proprietà vera per una moltitudine di casi è comodo utilizzare lettere al posto dei numeri. Ad esempio:



$$S = \frac{1}{2} b \cdot h$$

Algebra

Con l'introduzione dell'algebra diventa possibile scrivere (in modo non immediatamente evidente) scritture matematiche prive di significato. Per ora abbiamo incontrato scritture prive di significato come:

- $\frac{1}{0}$ oppure $\frac{0}{0}$: $\frac{a}{b} \rightarrow b \neq 0$

Algebra

Con l'introduzione dell'algebra diventa possibile scrivere (in modo non immediatamente evidente) scritture matematiche prive di significato. Per ora abbiamo incontrato scritture prive di significato come:

- $\frac{1}{0}$ oppure $\frac{0}{0}$: $\frac{a}{b} \rightarrow b \neq 0$
- 0^0: $a^b \rightarrow a \neq 0 \wedge b \neq 0$

Monomio

Un monomio è una espressione letterale del tipo:

$$\underbrace{k}_{\text{coefficiente numerico}} \cdot \underbrace{b_1^{e_1} \cdot b_2^{e_2} \cdots b_n^{e_n}}_{\text{parte letterale}}$$

con $k \in \mathbb{R}$ e $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{N}$.

Monomio

Un monomio è una espressione letterale del tipo:

$$\underbrace{k}_{\text{coefficiente numerico}} \cdot \underbrace{b_1^{e_1} \cdot b_2^{e_2} \cdots b_n^{e_n}}_{\text{parte letterale}}$$

con $k \in \mathbb{R}$ e $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{N}$.

Grado di un monomio

Il grado di un monomio, g, è:

$$g = e_1 + e_2 + e_3 \cdots + e_n$$

Monomi simili

Due monomi si dicono simili se hanno la stessa parte letterale.

Esempio:

$$-8ab^5z^3$$

É un monomio con coefficiente numerico -8, parte letterale ab^5z^3, grado 9, grado rispetto ad a 1, grado rispetto a b 5, grado rispetto a z 3. Il monomio è in forma normale perché ogni lettera, nella parte letterale, compare una sola volta. Il monomio è simile, ad esempio, al monomio $6ab^5z^3$.

Esempi di somma di monomi simili:

- $8a^3 - 2a^3 = (8-2)\,a^3 = 6a^3$

Esempi di somma di monomi simili:

- $8a^3 - 2a^3 = (8-2)\,a^3 = 6a^3$
- $5z^2b + 7z^2b = (5+7)\,z^2b = 12z^2b$

Esempi di somma di monomi simili:

- $8a^3 - 2a^3 = (8-2)\,a^3 = 6a^3$
- $5z^2b + 7z^2b = (5+7)\,z^2b = 12z^2b$
- $-\frac{1}{2}h^2k^4 - 2h^2k^4 = \left(-\frac{1}{2} - 2\right)h^2k^4 = -\frac{5}{2}h^2k^4$

Esempi di somma di monomi simili:

- $8a^3 - 2a^3 = (8-2)\,a^3 = 6a^3$
- $5z^2b + 7z^2b = (5+7)\,z^2b = 12z^2b$
- $-\frac{1}{2}h^2k^4 - 2h^2k^4 = \left(-\frac{1}{2} - 2\right)h^2k^4 = -\frac{5}{2}h^2k^4$
- $11w^2xy - 11w^2xy = (11-11)\,w^2xy = 0$

Esempi di prodotto tra monomi:

- $2xy \cdot 7xab^3 = (2 \cdot 7)(xy)(xab^3) = 14x^2yab^3$

Esempi di prodotto tra monomi:

- $2xy \cdot 7xab^3 = (2 \cdot 7)(xy)(xab^3) = 14x^2yab^3$
- $5a^3 \cdot 2a^2 = (5 \cdot 2)(a^3)(a^2) = 10a^5$

Esempi di prodotto tra monomi:

- $2xy \cdot 7xab^3 = (2 \cdot 7)(xy)(xab^3) = 14x^2yab^3$
- $5a^3 \cdot 2a^2 = (5 \cdot 2)(a^3)(a^2) = 10a^5$
- $3a^3k^2 \cdot (-2a^2x) = (3 \cdot (-2))(a^3k^2)(a^2x) = -6a^5k^2x$

Esempi di potenze naturali di monomi:

- $\left(\frac{1}{3}a^2b\right)^3 = \frac{1^3}{3^3}\left(a^2\right)^3(b)^3 = \frac{1}{27}a^6b^3$

Esempi di potenze naturali di monomi:

- $\left(\frac{1}{3}a^2b\right)^3 = \frac{1^3}{3^3}\left(a^2\right)^3(b)^3 = \frac{1}{27}a^6b^3$
- $\left(-2xy^4\right)^2 = (-2)^2(x)^2\left(y^4\right)^2 = 4x^2y^8$

Divisione tra monomi

Se A e B sono due monomi, A è divisibile per $B \neq 0$ se esiste un monomio Q tale che $A = Q \cdot B$. Si scrive in tal caso $A : B = Q$ e A è un monomio multiplo di B.

Esempi di divisione tra monomi:

Divisione tra monomi

Se A e B sono due monomi, A è divisibile per $B \neq 0$ se esiste un monomio Q tale che $A = Q \cdot B$. Si scrive in tal caso $A : B = Q$ e A è un monomio multiplo di B.

Esempi di divisione tra monomi:

- $\left(2x^3y\right) : (3xy) = \frac{2}{3}x^2$

Divisione tra monomi

Se A e B sono due monomi, A è divisibile per $B \neq 0$ se esiste un monomio Q tale che $A = Q \cdot B$. Si scrive in tal caso $A : B = Q$ e A è un monomio multiplo di B.

Esempi di divisione tra monomi:

- $\left(2x^3y\right):(3xy) = \frac{2}{3}x^2$
- $\left(5a^2b^3c^4\right):\left(-7ab^3c\right) = -\frac{5}{7}ac^3$

Massimo comune divisore

Il massimo comune divisore tra monomi è il monomio di grado massimo che sia divisore di tutti i monomi dati, con coefficiente il massimo comune divisore del valore assoluto dei coefficienti dati se questi sono interi, con coefficiente 1 altrimenti.

Il calcolo della parte letterale del massimo comune divisore si effettua moltiplicando tra loro i fattori letterali, comuni, dei monomi dati in forma normale, presi una volta sola con l'esponente minimo.

Minimo comune multiplo

Il minimo comune multiplo tra monomi è il monomio di grado minimo che sia multiplo di tutti i monomi dati, con coefficiente il minimo comune multiplo del valore assoluto dei coefficienti dati se questi sono interi, con coefficiente 1 altrimenti.

Il calcolo della parte letterale del minimo comune multiplo si effettua moltiplicando tra loro i fattori letterali, comuni e non comuni, dei monomi dati in forma normale, quelli comuni presi una volta sola con l'esponente massimo.

Polinomio

Un polinomio è una espressione che può essere scritta come somma algebrica di monomi.

Sono polinomi:

Polinomio

Un polinomio è una espressione che può essere scritta come somma algebrica di monomi.

Sono polinomi:

- $ax^2 + bx + c$

Polinomio

Un polinomio è una espressione che può essere scritta come somma algebrica di monomi.

Sono polinomi:

- $ax^2 + bx + c$
- $2ax + c$

Polinomio

Un polinomio è una espressione che può essere scritta come somma algebrica di monomi.

Sono polinomi:

- $ax^2 + bx + c$
- $2ax + c$
- $a^2bz - adv^4$

Polinomio in forma normale

Un polinomio si dice ridotto in forma normale se non contiene monomi simili tra loro e ogni monomio che lo compone è ridotto a forma normale.

Polinomio in forma normale

Un polinomio si dice ridotto in forma normale se non contiene monomi simili tra loro e ogni monomio che lo compone è ridotto a forma normale.

Grado di un polinomio

É il massimo grado dei monomi che lo compongono quando ridotto in forma normale.

Polinomio in forma normale

Un polinomio si dice ridotto in forma normale se non contiene monomi simili tra loro e ogni monomio che lo compone è ridotto a forma normale.

Grado di un polinomio

É il massimo grado dei monomi che lo compongono quando ridotto in forma normale.

Polinomio completo rispetto ad una variabile

Un polinomio si dice completo rispetto ad una certa variabile se, ridotto a forma normale, nel polinomio la variabile compare con tutte le potenze da 0 ad un certo valore massimo.

Polinomi e funzioni

Si chiama funzione polinomiale di grado n la funzione:

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n, \text{ con } c_n \neq 0$$

Si dicono zeri del polinomio i valori di x per cui $P(x) = 0$.

I prodotti notevoli sono identità, tautologie che consentono di esprimere in due modalità equivalenti ma diverse una medesima espressione mettendone in evidenza di volta in volta diverse caratteristiche o proprietà.

Quadrato di binomio, somma:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

in sintesi si ha:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ma anche:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

Quadrato di binomio, differenza:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 =$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

in sintesi si ha:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

ma anche:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Quadrato di trinomio:

$$(a+b+c)^2 = ((a+b)+c)^2 = (a+b)^2+2(a+b)c+c^2 =$$
$$= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$

in sintesi si ha:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2bc+2ac+2ab$$

ma anche:

$$a^2+b^2+c^2+2bc+2ac+2ab = (a+b+c)^2$$

Cubo di binomio, somma:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = \left(a^2+2ab+b^2\right)(a+b) =$$
$$= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 =$$
$$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

in sintesi si ha:

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

ma anche:

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = (a+b)^3$$

Cubo di binomio, differenza:

$$(a-b)^3 = (a-b)^2 (a-b) = \left(a^2 - 2ab + b^2\right)(a-b) =$$
$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 =$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

in sintesi si ha:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

ma anche:

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$$

Somma per differenza, differenza di due quadrati:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

in sintesi si ha:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

ma anche:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Somma di due cubi:

$$(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=$$
$$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3$$

in sintesi si ha:

$$(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3+b^3$$

ma anche:

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$

Differenza di due cubi:

$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=$$
$$=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3$$

in sintesi si ha:

$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$$

ma anche:

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

Trinomi di secondo grado:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right.$$

$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=ax^2+bx+c$$

in sintesi si ha:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

Divisione con resto tra polinomi

$$A(x) : B(x)$$

Dati due polinomi $A(x)$ e $B(x)$, con $B(x) \neq 0$, esistono sempre e sono unici, due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che:

$$A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)$$

dove $R(x)$ è un polinomio (o $R(x) = 0$) di grado minore del grado di $B(x)$.

Algoritmo della divisione tra polinomi (es.):
scriviamo il dividendo $A(x)$ *ordinato e completo*

$$6x^3 - 4x^2 + 0x + 1 \;\Big|\;$$

Algoritmo della divisione tra polinomi (es.):
scriviamo il divisore $B(x)$ ordinato

$$
\begin{array}{l|l}
6x^3 - 4x^2 + 0x + 1 & 2x^2 + 1 \\
\hline
& \\
\end{array}
$$

Algoritmo della divisione tra polinomi (es.):
dividiamo i monomi di grado massimo

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 - 4x^2 + 0x + 1 & 2x^2 + 1 \\ \hline & \\ & \\ & \end{array}$$

Algoritmo della divisione tra polinomi (es.):
scriviamo il risultato della divisione tra i monomi

$$
\begin{array}{l|l}
6x^3 - 4x^2 + 0x + 1 & 2x^2 + 1 \\
\cline{2-2}
 & 3x
\end{array}
$$

Algoritmo della divisione tra polinomi (es.):
determiniamo il polinomio da sommare al dividendo

$$
\begin{array}{l|l}
6x^3 - 4x^2 + 0x + 1 & 2x^2 + 1 \\
\hline
-6x^3 & 3x
\end{array}
$$

Algoritmo della divisione tra polinomi (es.):
determiniamo il polinomio da sommare al dividendo

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 - 4x^2 + 0x + 1 & 2x^2 + 1 \\ \cline{2-2} -6x^3 - 3x & 3x \\ & \\ & \end{array}$$

Algoritmo della divisione tra polinomi (es.):
determiniamo il primo resto parziale

$$
\begin{array}{l|l}
6x^3-4x^2+0x+1 & 2x^2+1 \\
\cline{2-2}
-6x^3-3x & 3x \\
\hline
-4x^2-3x+1 &
\end{array}
$$

Algoritmo della divisione tra polinomi (es.):

dividiamo i termini di grado massimo

$$
\begin{array}{l|l}
6x^3 - 4x^2 + 0x + 1 & 2x^2 + 1 \\
\cline{2-2}
-6x^3 - 3x & 3x \\
\cline{1-1}
-4x^2 - 3x + 1 & \\
& \\
& \\
\end{array}
$$

Algoritmo della divisione tra polinomi (es.):
scriviamo il risultato della divisione tra i monomi

$$
\begin{array}{l|l}
6x^3 - 4x^2 + 0x + 1 & 2x^2 + 1 \\
\cline{2-2}
-6x^3 - 3x & 3x - 2 \\
\hline
-4x^2 - 3x + 1 &
\end{array}
$$

Algoritmo della divisione tra polinomi (es.):
determiniamo il polinomio da sommare al resto parziale

$$\begin{array}{l|l}
6x^3 - 4x^2 + 0x + 1 & 2x^2 + 1 \\ \cline{2-2}
-6x^3 - 3x & 3x - 2 \\ \hline
-4x^2 - 3x + 1 & \\
4x^2 &
\end{array}$$

Algoritmo della divisione tra polinomi (es.):
determiniamo il polinomio da sommare al resto parziale

$$\begin{array}{l|l}
6x^3-4x^2+0x+1 & 2x^2+1 \\ \cline{2-2}
-6x^3-3x & 3x-2 \\ \cline{1-1}
-4x^2-3x+1 & \\
4x^2+2 &
\end{array}$$

Algoritmo della divisione tra polinomi (es.):
determiniamo il secondo resto parziale

$$
\begin{array}{l|l}
6x^3 - 4x^2 + 0x + 1 & 2x^2 + 1 \\ \cline{2-2}
-6x^3 - 3x & 3x - 2 \\ \hline
-4x^2 - 3x + 1 & \\
4x^2 + 2 & \\ \hline
-3x + 3 &
\end{array}
$$

Algoritmo della divisione tra polinomi (es.):
abbiamo determinato il resto, $R(x)$

$$
\begin{array}{l|l}
6x^3 - 4x^2 + 0x + 1 & 2x^2 + 1 \\ \cline{2-2}
-6x^3 - 3x & 3x - 2 \\ \cline{1-1}
-4x^2 - 3x + 1 & \\
4x^2 + 2 & \\ \cline{1-1}
-3x + 3 &
\end{array}
$$

Algoritmo della divisione tra polinomi (es.):
abbiamo determinato il quoziente, $Q(x)$

$$\begin{array}{l|l}
6x^3-4x^2+0x+1 & 2x^2+1 \\ \cline{2-2}
-6x^3-3x & 3x-2 \\ \hline
-4x^2-3x+1 & \\
4x^2+2 & \\ \hline
-3x+3 &
\end{array}$$

Riassumendo:

$$A(x) = 6x^3 - 4x^2 + 0x + 1$$

$$B(x) = 2x^2 + 1$$

$$Q(x) = 3x - 2$$

$$R(x) = -3x + 3$$

Si ha che:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Se il divisore, in una divisione tra polinomi, è della forma $(x - c)$, allora è possibile applicare la regola di Ruffini per eseguire la divisione. Si può anche eseguire l'algoritmo generale precedentemente mostrato ma la regola di Ruffini risulta più rapida.

Eseguiamo la divisione $\left(x^3-7x-4\right):(x-3)$ con la regola di Ruffini:
scriviamo i coefficienti del dividendo ordinati e completi

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & +1 & +0 & -7 & -4 \\
 & & & & \\
\hline
 & & & &
\end{array}
$$

Eseguiamo la divisione $\left(x^3-7x-4\right):(x-3)$ con la regola di Ruffini:

scriviamo il termine noto del divisore cambiato di segno

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & +1 & +0 & \text{-}7 & \text{-}4 \\
{\color{red}+3} & & & & \\
\hline
 & & & & \\
\end{array}
$$

Eseguiamo la divisione $\left(x^3 - 7x - 4\right) : (x - 3)$ con la regola di Ruffini:

abbassiamo il primo coefficiente del dividendo

	$+1$	$+0$	-7	-4
$+3$				
	$+1$			

Eseguiamo la divisione $\left(x^3 - 7x - 4\right) : (x - 3)$ con la regola di Ruffini:

moltiplichiamo i coefficienti

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & +1 & +0 & -7 & -4 \\
+3 & & & & \\
\hline
 & +1 & & &
\end{array}
$$

Eseguiamo la divisione $\left(x^3 - 7x - 4\right) : (x - 3)$ con la regola di Ruffini:

scriviamo il risultato della moltiplicazione

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & +1 & +0 & -7 & -4 \\
+3 & & \color{red}{+3} & & \\
\hline
 & +1 & & & \\
\end{array}
$$

Eseguiamo la divisione $\left(x^3 - 7x - 4\right) : (x - 3)$ con la regola di Ruffini:

sommiamo i termini in colonna

$$\begin{array}{c|ccc|c} & +1 & +0 & -7 & -4 \\ +3 & & +3 & & \\ \hline & +1 & +3 & & \end{array}$$

Eseguiamo la divisione $\left(x^3-7x-4\right):(x-3)$ con la regola di Ruffini:

moltiplichiamo i coefficienti

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & +1 & +0 & -7 & -4 \\
\color{red}{+3} & & +3 & & \\
\hline
 & +1 & \color{red}{+3} & & \\
\end{array}
$$

Eseguiamo la divisione $\left(x^3 - 7x - 4\right) : (x - 3)$ con la regola di Ruffini:

scriviamo il risultato della moltiplicazione

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & +1 & +0 & -7 & -4 \\
+3 & & +3 & \color{red}{+9} & \\
\hline
 & +1 & +3 & &
\end{array}
$$

Eseguiamo la divisione $\left(x^3 - 7x - 4\right) : (x - 3)$ con la regola di Ruffini:

sommiamo i termini in colonna

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & +1 & +0 & -7 & -4 \\
+3 & & +3 & +9 & \\
\hline
 & +1 & +3 & +2 &
\end{array}
$$

Eseguiamo la divisione $\left(x^3-7x-4\right):(x-3)$ con la regola di Ruffini:

moltiplichiamo i coefficienti

$$\begin{array}{r|rrr|r} & +1 & +0 & -7 & -4 \\ +3 & & +3 & +9 & \\ \hline & +1 & +3 & +2 & \end{array}$$

Eseguiamo la divisione $\left(x^3 - 7x - 4\right) : (x - 3)$ con la regola di Ruffini:

scriviamo il risultato della moltiplicazione

	+1	+0	-7	-4
+3		+3	+9	+6
	+1	+3	+2	

Eseguiamo la divisione $\left(x^3 - 7x - 4\right) : (x - 3)$ con la regola di Ruffini:

sommiamo i termini in colonna

	$+1$	$+0$	-7	-4
$+3$		$+3$	$+9$	$+6$
	$+1$	$+3$	$+2$	$+2$

Eseguiamo la divisione $\left(x^3 - 7x - 4\right) : (x-3)$ con la regola di Ruffini:

abbiamo determinato i coefficienti del quoziente

$$\begin{array}{r|rrr|r} & +1 & +0 & -7 & -4 \\ +3 & & +3 & +9 & +6 \\ \hline & \color{red}{+1} & \color{red}{+3} & \color{red}{+2} & +2 \end{array}$$

Eseguiamo la divisione $\left(x^3 - 7x - 4\right) : (x - 3)$ con la regola di Ruffini:

abbiamo determinato il resto

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & +1 & +0 & -7 & -4 \\
+3 & & +3 & +9 & +6 \\
\hline
 & +1 & +3 & +2 & +2
\end{array}
$$

Riassumendo:

$$A(x) = x^3 - 7x - 4$$

$$B(x) = x - 3$$

$$Q(x) = x^2 + 3x + 2$$

$$R(x) = 2$$

Si ha che:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Teorema del resto

Il resto della divisione $P(x):(x-c)$, con $P(x)$ polinomio di grado maggiore o uguale a 1, è $R=P(c)$.

Teorema del resto

Il resto della divisione $P(x):(x-c)$, con $P(x)$ polinomio di grado maggiore o uguale a 1, è $R = P(c)$.

Dimostrazione del teorema del resto

Il resto deve essere un polinomio di grado inferiore al grado del divisore, quindi un numero (cioè un polinomio di grado zero).
Per la definizione della divisione tra polinomi deve essere:

$$P(x) = Q(x) \cdot (x-c) + R, \forall x$$

se $x = c \rightarrow P(c) = Q(c) \cdot (c-c) + R \rightarrow R = P(c)$

Teorema di Ruffini

Un polinomio $P(x)$ è divisibile per $(x-c)$ se e solo se $P(c)=0$.

ATTENZIONE: il teorema di Ruffini garantisce che noto uno zero c di un polinomio esso è divisibile per $(x-c)$ ma non fornisce criteri per determinare c.

Teorema di Ruffini

Un polinomio $P(x)$ è divisibile per $(x-c)$ se e solo se $P(c)=0$.

Dimostrazione del teorema di Ruffini

ATTENZIONE: il teorema di Ruffini garantisce che noto uno zero c di un polinomio esso è divisibile per $(x-c)$ ma non fornisce criteri per determinare c.

Teorema di Ruffini

Un polinomio $P(x)$ è divisibile per $(x-c)$ se e solo se $P(c)=0$.

Dimostrazione del teorema di Ruffini

- se $P(c)=0$ allora per il teorema del resto si ha $R=0$

ATTENZIONE: il teorema di Ruffini garantisce che noto uno zero c di un polinomio esso è divisibile per $(x-c)$ ma non fornisce criteri per determinare c.

Teorema di Ruffini

Un polinomio $P(x)$ è divisibile per $(x-c)$ se e solo se $P(c)=0$.

Dimostrazione del teorema di Ruffini

- se $P(c)=0$ allora per il teorema del resto si ha $R=0$
- se $R=0$ deve essere $P(x)=(x-c)\cdot Q(x), \forall x$, che per $x=c$ diventa $P(c)=0$

ATTENZIONE: il teorema di Ruffini garantisce che noto uno zero c di un polinomio esso è divisibile per $(x-c)$ ma non fornisce criteri per determinare c.

Teorema fondamentale dell'algebra (versione debole)

Un polinomio $P(x)$ di grado n ha al massimo n zeri, cioè esistono al massimo n diversi c per cui si ha che $P(c) = 0$.

Dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra (versione debole)

Consideriamo $n \geq 1$, se $n = 0$ il polinomio è un numero e il teorema è banalmente vero:

Dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra (versione debole)

Consideriamo $n \geq 1$, se $n = 0$ il polinomio è un numero e il teorema è banalmente vero:

- se non esistono c il teorema è verificato

Dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra (versione debole)

Consideriamo $n \geq 1$, se $n = 0$ il polinomio è un numero e il teorema è banalmente vero:

- se non esistono c il teorema è verificato
- se esiste uno zero del polinomio per il teorema di Ruffini $P(x) = (x - c) \cdot Q(x)$ con $Q(x)$ di grado $n - 1$; si può ripetere il ragionamento proposto con $Q(x)$ fino a che il resto non diventa di grado 0 o fino a quando non esistono zeri per $Q(x)$. É possibile rieffettuare la divisione al massimo n volte.

Scomposizione dei polinomi (1)

Il teorema fondamentale dell'algebra (versione debole) ci assicura che una funzione polinomiale di grado n si possa fattorizzare come:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n = a_n(x-c_1)(x-c_2)\cdots Q($$

con $c_1, c_2, \ldots$ zeri del polinomio e $Q(x)$ eventuale polinomio di grado superiore a 1 senza zeri.
I fattori $(x-c_1)$, $(x-c_2)$ ...Q(x) si dicono fattori irriducibili del polinomio.

Scomposizione dei polinomi (2)

É possibile che alcuni zeri si presentino più volte nella scomposizione. In questo caso l'equazione precedente si può scrivere come:

$$a_0 \cdots + a_n x^n = a_n (x - c_1)^{m_1} (x - c_2)^{m_2} \cdots Q(x)^{m_Q}$$

con $c_1, c_2, \ldots$ zeri del polinomio e $Q(x)$ eventuale polinomio di grado superiore a 1 senza zeri.
I fattori $(x - c_1)$, $(x - c_2)$ ...Q(x) si dicono fattori irriducibili del polinomio e m_1, ...m_Q si dicono molteplicità.

Fattorizzare un polinomio è equivalente a determinarne gli zeri. Esistono tecniche per determinare gli zeri dei polinomi fino al grado 4. Dal grado 5 compreso in poi si dimostra che non è possibile determinare in modo esatto gli zeri di un polinomio (a meno di casi particolari). Di seguito vedremo come scomporre i trinomi di secondo grado. Ricordiamo l'identità:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Fattorizzazione trinomi, esempio con $b^2 - 4ac > 0$:

$$12x^2 - 5x - 2$$

$$12\left[\underbrace{x^2 - \frac{5}{12}x} - \frac{1}{6}\right]$$

$$12\left[\overbrace{\left(x - \frac{5}{24}\right)^2 - \frac{5^2}{24^2}} - \frac{1}{6}\right]$$

$$12\left[\left(x - \frac{5}{24}\right)^2 - \frac{121}{576}\right]$$

$$12\left[\left(x-\frac{5}{24}\right)^2-\left(\frac{11}{24}\right)^2\right]$$

$$12\left[\left(x-\frac{5}{24}+\frac{11}{24}\right)\left(x-\frac{5}{24}-\frac{11}{24}\right)\right]$$

$$12\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$12\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

Fattorizzazione trinomi, esempio con $b^2 - 4ac = 0$:

$$25x^2 - 10x + 1$$

$$25\left[\underbrace{x^2 - \frac{2}{5}x} + \frac{1}{25}\right]$$

$$25\left[\overbrace{\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{25}} + \frac{1}{25}\right]$$

$$25\left(x - \frac{1}{5}\right)^2$$

Fattorizzazione trinomi, esempio con $b^2 - 4ac < 0$:

$$2x^2 - 4x + 3$$

$$2\left[\underbrace{x^2 - 2x}+\frac{3}{2}\right]$$

$$2\left[\overbrace{(x-1)^2 - 1}+\frac{3}{2}\right]$$

$$2\left[(x-1)^2 + \frac{1}{2}\right]$$

Il trinomio non ammette zeri (perché somma di due quantità positive di cui una non nulla), è quindi irriducibile.

Massimo comune divisore

Il massimo comune divisore tra polinomi è ogni polinomio di grado massimo che sia divisore di tutti i polinomi dati.

Il calcolo dei un massimo comune divisore si effettua moltiplicando tra loro i fattori irriducibili comuni dei polinomi dati, presi una volta sola con molteplicità minima.

Minimo comune multiplo

Il minimo comune multiplo tra polinomi è un polinomio di grado minimo che sia multiplo di tutti i monomi dati.

Il calcolo di un minimo comune multiplo si effettua moltiplicando tra loro i fattori irriducibili, comuni e non comuni dei polinomi dati, quelli comuni presi una volta sola con molteplicità massima.

Frazioni algebriche

Una frazione algebrica è una espressione del tipo:

$$\frac{A}{B}$$

con A e B, polinomi e B non nullo.

Frazioni algebriche

Una frazione algebrica è una espressione del tipo:

$$\frac{A}{B}$$

con A e B, polinomi e B non nullo.

Condizione di esistenza di una frazione algebrica

Una frazione algebrica perde di significato se $B = 0$, prima di elaborare una scrittura di una frazione algebrica si devono ricavarne le condizioni di esistenza: $B \neq 0$.

Equazioni

Una equazione è una uguaglianza tra due membri $A = B$ che gode delle proprietà:

Riflessiva $A = A$

Equazioni

Una equazione è una uguaglianza tra due membri $A = B$ che gode delle proprietà:

Riflessiva $A = A$

Simmetrica $A = B \leftrightarrow B = A$

Equazioni

Una equazione è una uguaglianza tra due membri $A = B$ che gode delle proprietà:

Riflessiva $A = A$

Simmetrica $A = B \leftrightarrow B = A$

Transitiva Se $A = B$ e $B = C$ allora $A = C$

Equazioni

Una equazione è una uguaglianza tra due membri $A = B$ che gode delle proprietà:

Riflessiva $A = A$

Simmetrica $A = B \leftrightarrow B = A$

Transitiva Se $A = B$ e $B = C$ allora $A = C$

Valori di verità di una equazione

Una equazione può essere vera (es. $5 = 3 + 2$), falsa (es. $8 = 5 - 3$) oppure priva di significato (es. $\frac{3}{0} = 30$).

Equazioni

I membri di una equazione possono dipendere da una (o più) incognite (es. $x = 1 + \frac{1}{2}x$) , in questo caso:

risolvere una equazione

Risolvere una equazione significa trovare tutti i valori della/e incognite (solitamente identificate con le ultime lettere dell'alfabeto, x, y, z) che la rendono vera.

Equazioni

Per risolvere le equazioni si possono utilizzare i principi di equivalenza, cioè operazioni che applicate ad ambo i membri dell'equazione non ne mutano il valore di verità.

Primo principio di equivalenza

$$A = B \leftrightarrow A + C = B + C$$

Prima di iniziare il procedimento risolutivo dobbiamo eliminare la possibilità che l'equazione sia priva di significato, determiniamo quello che si chiama Campo di Esistenza o C.E..

Equazioni

Per risolvere le equazioni si possono utilizzare i principi di equivalenza, cioè operazioni che applicate ad ambo i membri dell'equazione non ne mutano il valore di verità.

Primo principio di equivalenza

$$A = B \leftrightarrow A + C = B + C$$

Secondo principio di equivalenza

$$A = B \leftrightarrow A \cdot C = B \cdot C, C \neq 0$$

Prima di iniziare il procedimento risolutivo dobbiamo eliminare la possibilità che l'equazione sia priva di significato, determiniamo quello che si chiama Campo di Esistenza o C.E..

Equazioni

Equazioni - Esempio 1

$$3x+2=8$$

L'unico valore dell'incognita che rende vera l'equazione è 2.

Equazioni - Esempio 1

$$3x+2=8$$

L'unico valore dell'incognita che rende vera l'equazione è 2.

Equazioni

Equazioni - Esempio 1

3x+2=8 $\qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$

L'unico valore dell'incognita che rende vera l'equazione è 2.

Equazioni

Equazioni - Esempio 1

$$-2 \quad 3x+2=8 \quad -2 \qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

L'unico valore dell'incognita che rende vera l'equazione è 2.

Equazioni

Equazioni - Esempio 1

$$\begin{array}{c} 3x+2=8 \\ -2 \qquad\qquad -2 \\ 3x=6 \end{array} \qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

L'unico valore dell'incognita che rende vera l'equazione è 2.

Equazioni

Equazioni - Esempio 1

$$\begin{array}{ccc} & 3x+2=8 & \\ -2 & & -2 \\ \cdot\frac{1}{3} & 3x=6 & \cdot\frac{1}{3} \end{array} \qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

L'unico valore dell'incognita che rende vera l'equazione è 2.

Equazioni - Esempio 1

$$\begin{array}{ccc} & 3x+2=8 & \\ -2 & & -2 \\ & 3x=6 & \\ \cdot\frac{1}{3} & & \cdot\frac{1}{3} \\ & x=2 & \end{array} \qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

L'unico valore dell'incognita che rende vera l'equazione è 2.

Equazioni - Esempio 2

$$3x+1=1+3x$$

L'equazione è verificata per qualsiasi valore dell'incognita x.

Equazioni

Equazioni - Esempio 2

$$3x+1=1+3x$$

L'equazione è verificata per qualsiasi valore dell'incognita x.

Equazioni

Equazioni - Esempio 2

$$3x+1=1+3x \qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

L'equazione è verificata per qualsiasi valore dell'incognita x.

Equazioni

Equazioni - Esempio 2

$$3x + 1 = 1 + 3x$$
$$-3x \qquad\qquad -3x \qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

L'equazione è verificata per qualsiasi valore dell'incognita x.

Equazioni - Esempio 2

$$\begin{array}{rcl} & 3x+1=1+3x & \\ -3x & & -3x \\ & 1=1 & \end{array} \qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

L'equazione è verificata per qualsiasi valore dell'incognita x.

Equazioni - Esempio 2

$$3x+1=1+3x \qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

$$-3x \qquad\qquad -3x$$

$$1=1$$

$$\forall x$$

L'equazione è verificata per qualsiasi valore dell'incognita x.

Equazioni

Equazioni - Esempio 3

$$3x+1=2+3x$$

L'equazione non è mai verificata. Non esistono x che la rendano vera.

Equazioni

Equazioni - Esempio 3

$$3x+1=2+3x$$

L'equazione non è mai verificata. Non esistono x che la rendano vera.

Equazioni

Equazioni - Esempio 3

$$3x+1=2+3x \qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

L'equazione non è mai verificata. Non esistono x che la rendano vera.

Equazioni

Equazioni - Esempio 3

$$\begin{array}{ccc} & 3x+1=2+3x & \\ -3x & & -3x \end{array} \qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

L'equazione non è mai verificata. Non esistono x che la rendano vera.

Equazioni

Equazioni - Esempio 3

$$3x+1=2+3x \qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

$$-3x \qquad\qquad -3x$$

$$1=2$$

L'equazione non è mai verificata. Non esistono x che la rendano vera.

Equazioni - Esempio 3

$$3x+1=2+3x \qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

$$-3x \qquad\qquad -3x$$

$$1=2$$

$$\nexists x$$

L'equazione non è mai verificata. Non esistono x che la rendano vera.

Equazioni - Esempio 4

$$\frac{x-1}{x-1} = 0$$

L'equazione non è verificata in quanto $x-1$ è il denominatore dell'equazione di partenza e non può essere nullo, pena la perdita di significato della scrittura. A posteriori si ottiene anche che non era nemmeno corretto moltiplicare ambo i membri per $x-1$ in quanto quantità nulla.

Equazioni - Esempio 4

$$\frac{x-1}{x-1} = 0$$

L'equazione non è verificata in quanto $x-1$ è il denominatore dell'equazione di partenza e non può essere nullo, pena la perdita di significato della scrittura. A posteriori si ottiene anche che non era nemmeno corretto moltiplicare ambo i membri per $x-1$ in quanto quantità nulla.

Equazioni - Esempio 4

$$[C.E.: \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}]$$

$$\frac{x-1}{x-1} = 0$$

L'equazione non è verificata in quanto $x-1$ è il denominatore dell'equazione di partenza e non può essere nullo, pena la perdita di significato della scrittura. A posteriori si ottiene anche che non era nemmeno corretto moltiplicare ambo i membri per $x-1$ in quanto quantità nulla.

Equazioni - Esempio 4

$$[C.E.: \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}]$$

$$\frac{x-1}{x-1} = 0$$

$$\cdot (x-1) \qquad \cdot (x-1)$$

L'equazione non è verificata in quanto $x-1$ è il denominatore dell'equazione di partenza e non può essere nullo, pena la perdita di significato della scrittura. A posteriori si ottiene anche che non era nemmeno corretto moltiplicare ambo i membri per $x-1$ in quanto quantità nulla.

Equazioni

Equazioni - Esempio 4

$$[C.E.: \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}]$$

$$\frac{x-1}{x-1} = 0$$

$$\cdot (x-1) \qquad \qquad \cdot (x-1)$$

x-1=0

L'equazione non è verificata in quanto $x - 1$ è il denominatore dell'equazione di partenza e non può essere nullo, pena la perdita di significato della scrittura. A posteriori si ottiene anche che non era nemmeno corretto moltiplicare ambo i membri per $x - 1$ in quanto quantità nulla.

Equazioni - Esempio 4

$$[C.E.: \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}]$$

$$\frac{x-1}{x-1} = 0$$

$$\cdot(x-1) \qquad \qquad \cdot(x-1)$$

x-1=0

$$\nexists x$$

L'equazione non è verificata in quanto $x-1$ è il denominatore dell'equazione di partenza e non può essere nullo, pena la perdita di significato della scrittura. A posteriori si ottiene anche che non era nemmeno corretto moltiplicare ambo i membri per $x-1$ in quanto quantità nulla.

Comportamento dello zero rispetto al prodotto:

$$z \cdot 0 = 0 \forall z \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione:

$$z \cdot 0 = z \cdot (0 + 0)$$

$$z \cdot 0 = z \cdot 0 + z \cdot 0$$

$$z \cdot 0 - z \cdot 0 = z \cdot 0 + z \cdot 0 - z \cdot 0$$

$$0 = z \cdot 0$$

Legge di annullamento del prodotto:

$$a \cdot b = 0 \leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

La dimostrazione si ha da quanto visto sul comportamento dello zero rispetto al prodotto essendo $(z = a \wedge b = 0) \vee (z = b \wedge a = 0)$.

Esempio uso legge di annullamento del prodotto

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$[C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

$$2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3) = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3) = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \vee x = 3$$

Una disuguaglianza è una scrittura del tipo:

$$a \neq b$$

che è la negazione di

$$a = b$$

Come si risolve una disuguaglianza? Basta risolvere l'equazione e poi negare il risultato.

Esempio disuguaglianza:

$$2x^2 - 5x - 3 \neq 0$$

$$[C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

$$\boxed{2x^2 - 5x - 3 = 0 \rightarrow x = -\tfrac{1}{2} \vee x = 3}$$

$$x \neq -\frac{1}{2} \wedge x \neq 3$$

Disequazioni

Una disequazione è una relazione d'ordine stretto tra due membri $A > B$ oppure $A < B$ che gode delle proprietà:

antiriflessiva $x \not> x$ $(x \not< x)$

Disequazioni

Una disequazione è una relazione d'ordine stretto tra due membri $A > B$ oppure $A < B$ che gode delle proprietà:

antiriflessiva $x \ngtr x$ $(x \nless x)$

antisimmetrica $x > y \Rightarrow y \ngtr x$ $(x < y \Rightarrow y \nless x)$

Disequazioni

Una disequazione è una relazione d'ordine stretto tra due membri $A > B$ oppure $A < B$ che gode delle proprietà:

antiriflessiva $x \not> x$ $(x \not< x)$

antisimmetrica $x > y \Rightarrow y \not> x$ $(x < y \Rightarrow y \not< x)$

transitiva $x > y \wedge y > z \Rightarrow x > z$
$(x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z)$

Disequazioni

Una disequazione è una relazione d'ordine stretto tra due membri $A > B$ oppure $A < B$ che gode delle proprietà:

antiriflessiva $x \ngtr x$ $(x \nless x)$

antisimmetrica $x > y \Rightarrow y \ngtr x$ $(x < y \Rightarrow y \nless x)$

transitiva $x > y \wedge y > z \Rightarrow x > z$
$(x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z)$

Valori di verità di una disequazione

Una disequazione può essere vera (es. $5 > 3 - 2$), falsa (es. $8 < 5 - 3$) oppure priva di significato (es. $\frac{3}{0} > 30$).

Disequazioni

Una disequazione può essere anche una relazione d'ordine largo tra due membri $A \geq B$ oppure $A \leq B$ con il seguente significato dei simboli:

$$A \geq B \longleftrightarrow A > B \vee A = B$$

Disequazioni

Una disequazione può essere anche una relazione d'ordine largo tra due membri $A \geq B$ oppure $A \leq B$ con il seguente significato dei simboli:

$$A \geq B \longleftrightarrow A > B \vee A = B$$

$$A \leq B \longleftrightarrow A < B \vee A = B$$

Disequazioni

Una disequazione può essere anche una relazione d'ordine largo tra due membri $A \geq B$ oppure $A \leq B$ con il seguente significato dei simboli:

$$A \geq B \longleftrightarrow A > B \vee A = B$$

$$A \leq B \longleftrightarrow A < B \vee A = B$$

Valori di verità di una disequazione

Una disequazione può essere vera (es. $5 \geq 3 + 2$), falsa (es. $8 \leq 5 - 3$) oppure priva di significato (es. $\frac{3}{0} \geq 30$).

Disequazioni

I membri di una disequazione possono dipendere da una (o più) incognite (es. $x > 1 + \frac{1}{2}x$) , in questo caso:

risolvere una disequazione

Risolvere una disequazione significa trovare tutti i valori della/e incognite (solitamente identificate con le ultime lettere dell'alfabeto, x, y, z) che la rendono vera.

Per risolvere le disequazioni si possono utilizzare i principi di equivalenza, cioè operazioni che applicate ad ambo i membri della disequazione non ne mutano il valore di verità.

Primo principio di equivalenza sulle disequazioni

$$A > B \leftrightarrow A + C > B + C$$

oppure

$$A < B \leftrightarrow A + C < B + C$$

Prima di iniziare il procedimento risolutivo dobbiamo eliminare la possibilità che la disequazione sia priva di significato, determiniamo quello che si chiama Campo di Esistenza o C.E..

Secondo principio di equivalenza sulle disequazioni con $C > 0$

$$A > B \leftrightarrow AC > BC$$

oppure

$$A < B \leftrightarrow AC < BC$$

Disequazioni

Cosa accade se si moltiplica per una quantità negativa $(-C)$ ambo i membri?

Cosa accade se si moltiplica per una quantità negativa $(-C)$ ambo i membri?

$$A > B$$

$$AC > BC$$

$$AC - BC - AC > BC - BC - AC$$

$$-BC > -AC$$

$$B(-C) > A(-C)$$

$$A(-C) < B(-C)$$

Cosa accade se si moltiplica per una quantità negativa $(-C)$ ambo i membri?

$$A > B \qquad A < B$$

$$AC > BC \qquad AC < BC$$

$$AC - BC - AC > BC - BC - AC \qquad AC - BC - AC < BC - BC - AC$$

$$-BC > -AC \qquad -BC < -AC$$

$$B(-C) > A(-C) \qquad B(-C) < A(-C)$$

$$A(-C) < B(-C) \qquad A(-C) > B(-C)$$

Secondo principio di equivalenza sulle disequazioni con $C < 0$

$$A > B \leftrightarrow AC < BC$$

oppure

$$A < B \leftrightarrow AC > BC$$

Il diverso comportamento delle disequazioni a seconda che si moltiplichino i membri per quantità positive o negative porta alla conseguenza di non poter moltiplicare per quantità il cui segno non sia definito.

Disequazioni - Esempio 1

$$3x+2>8$$

La disequazione è soddisfatta per tutti i valori di x maggiori di 2 (quindi è soddisfatta per $x = 3, x = \pi, x = \sqrt{15}...$).

Disequazioni

Disequazioni - Esempio 1

$$3x+2>8$$

La disequazione è soddisfatta per tutti i valori di x maggiori di 2 (quindi è soddisfatta per $x = 3, x = \pi, x = \sqrt{15}$...).

Disequazioni - Esempio 1

3x+2>8 $[C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$

La disequazione è soddisfatta per tutti i valori di x maggiori di 2 (quindi è soddisfatta per $x = 3, x = \pi, x = \sqrt{15}$...).

Disequazioni - Esempio 1

$$-2 \quad 3x+2>8 \quad -2 \qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

La disequazione è soddisfatta per tutti i valori di x maggiori di 2 (quindi è soddisfatta per $x = 3, x = \pi, x = \sqrt{15}...$).

Disequazioni

Disequazioni - Esempio 1

$$\begin{array}{c} 3x+2>8 \\ 3x>6 \end{array} \qquad -2 \qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

La disequazione è soddisfatta per tutti i valori di x maggiori di 2 (quindi è soddisfatta per $x = 3, x = \pi, x = \sqrt{15}...$).

Disequazioni

Disequazioni - Esempio 1

$$\begin{array}{ccc} & 3x+2>8 & \\ -2 & & -2 \\ & 3x>6 & \\ \cdot\frac{1}{3} & & \cdot\frac{1}{3} \end{array} \qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

La disequazione è soddisfatta per tutti i valori di x maggiori di 2 (quindi è soddisfatta per $x = 3, x = \pi, x = \sqrt{15}...$).

Disequazioni - Esempio 1

$$
\begin{array}{rcl}
 & 3x+2>8 & \\
-2 & & -2 \\
 & 3x>6 & \\
\cdot\frac{1}{3} & & \cdot\frac{1}{3} \\
 & x>2 &
\end{array}
\qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]
$$

La disequazione è soddisfatta per tutti i valori di x maggiori di 2 (quindi è soddisfatta per $x = 3, x = \pi, x = \sqrt{15}...$).

Disequazioni

Disequazioni - Esempio 2

$$3x^2 > -1 + x^2$$

La disequazione è verificata per qualsiasi valore dell'incognita x essendo il membro di sinistra sempre positivo quindi maggiore di quello di destra sempre negativo.

Disequazioni - Esempio 2

$$3x^2 > -1 + x^2$$

La disequazione è verificata per qualsiasi valore dell'incognita x essendo il membro di sinistra sempre positivo quindi maggiore di quello di destra sempre negativo.

Disequazioni

Disequazioni - Esempio 2

$$3x^2 > -1 + x^2 \qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

La disequazione è verificata per qualsiasi valore dell'incognita x essendo il membro di sinistra sempre positivo quindi maggiore di quello di destra sempre negativo.

Disequazioni - Esempio 2

$$\begin{array}{c} 3x^2 > -1 + x^2 \\ -x^2 \qquad\qquad\qquad -x^2 \end{array} \quad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

La disequazione è verificata per qualsiasi valore dell'incognita x essendo il membro di sinistra sempre positivo quindi maggiore di quello di destra sempre negativo.

Disequazioni

Disequazioni - Esempio 2

$$\begin{aligned} 3x^2 &> -1 + x^2 \\ -x^2 \qquad & \qquad -x^2 \\ 2x^2 &> -1 \end{aligned} \qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

La disequazione è verificata per qualsiasi valore dell'incognita x essendo il membro di sinistra sempre positivo quindi maggiore di quello di destra sempre negativo.

Disequazioni - Esempio 2

$$\begin{array}{rcl} & 3x^2 > -1 + x^2 & \\ -x^2 & & -x^2 \\ & 2x^2 > -1 & \end{array} \qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

$$\forall x$$

La disequazione è verificata per qualsiasi valore dell'incognita x essendo il membro di sinistra sempre positivo quindi maggiore di quello di destra sempre negativo.

Disequazioni - Esempio 3

$$3x^2 < -1 + x^2$$

La disequazione non è mai verificata essendo il membro di sinistra sempre positivo quindi maggiore (e non minore) di quello di destra sempre negativo.

Disequazioni - Esempio 3

$$3x^2 < -1 + x^2$$

La disequazione non è mai verificata essendo il membro di sinistra sempre positivo quindi maggiore (e non minore) di quello di destra sempre negativo.

Disequazioni - Esempio 3

$$3x^2 < -1 + x^2 \qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

La disequazione non è mai verificata essendo il membro di sinistra sempre positivo quindi maggiore (e non minore) di quello di destra sempre negativo.

Disequazioni - Esempio 3

$$3x^2 < -1 + x^2$$

$$-x^2 \qquad\qquad -x^2 \qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

La disequazione non è mai verificata essendo il membro di sinistra sempre positivo quindi maggiore (e non minore) di quello di destra sempre negativo.

Disequazioni - Esempio 3

$$\begin{array}{rcl} & 3x^2 < -1 + x^2 & \\ -x^2 & & -x^2 \\ & 2x^2 < -1 & \end{array} \qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

La disequazione non è mai verificata essendo il membro di sinistra sempre positivo quindi maggiore (e non minore) di quello di destra sempre negativo.

Disequazioni - Esempio 3

$$3x^2 < -1 + x^2 \qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R}]$$

$$-x^2 \qquad\qquad -x^2$$

$$2x^2 < -1$$

$$\nexists x \in \mathbb{R}$$

La disequazione non è mai verificata essendo il membro di sinistra sempre positivo quindi maggiore (e non minore) di quello di destra sempre negativo.

Disequazioni - Esempio 4

$$\frac{x+1}{x-1} > 0 \qquad [C.E.: \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}]$$

In casi come questo non è possibile moltiplicare ambo i membri per $(x-1)$. Infatti il denominatore della frazione assume segno sia positivo che negativo a seconda dei differenti valori di x. Che fare allora? La frazione è confrontata con lo 0, si può usare il teorema dei segni e la legge di annullamento del prodotto per risolvere la disequazione.

Disequazioni - Esempio 4

$$\frac{x+1}{x-1} > 0$$

$$[C.E.: \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}]$$

Studio separatamente il segno del numeratore e del denominatore:

$$N > 0 \rightarrow x+1 > 0 \rightarrow x > -1$$

$$D > 0 \rightarrow x-1 > 0 \rightarrow x > 1$$

Disequazioni

Disequazioni - Esempio 4

Usiamo il teorema dei segni e la legge di annullamento del prodotto:

	-1	1	
N			
D			
$\frac{N}{D}$			

La disequazione è risolta per

$$x < -1 \vee x > 1$$

Disequazioni - Esempio 4

Usiamo il teorema dei segni e la legge di annullamento del prodotto:

		-1	1
N		$+$	$+$
D			
$\frac{N}{D}$			

La disequazione è risolta per

$$x < -1 \vee x > 1$$

Disequazioni

Disequazioni - Esempio 4

Usiamo il teorema dei segni e la legge di annullamento del prodotto:

		-1	1
N	$-$	$+$	$+$
D			
$\frac{N}{D}$			

La disequazione è risolta per

$$x < -1 \vee x > 1$$

Disequazioni - Esempio 4

Usiamo il teorema dei segni e la legge di annullamento del prodotto:

$$-1 \qquad 1$$

N	$-$ 0	$+$	$+$
D			
$\frac{N}{D}$			

La disequazione è risolta per

$$x < -1 \lor x > 1$$

Disequazioni

Disequazioni - Esempio 4

Usiamo il teorema dei segni e la legge di annullamento del prodotto:

$$-1 \qquad 1$$

N	$-$ 0	$+$	$+$
D			$+$
$\frac{N}{D}$			

La disequazione è risolta per

$$x < -1 \lor x > 1$$

Disequazioni - Esempio 4

Usiamo il teorema dei segni e la legge di annullamento del prodotto:

	-1	1	
N	$-$ 0 $+$		$+$
D	$-$	$-$	$+$
$\frac{N}{D}$			

La disequazione è risolta per

$$x < -1 \vee x > 1$$

Disequazioni - Esempio 4

Usiamo il teorema dei segni e la legge di annullamento del prodotto:

		-1		1	
N	$-$	0	$+$		$+$
D	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{N}{D}$					

La disequazione è risolta per

$$x < -1 \vee x > 1$$

Disequazioni - Esempio 4

Usiamo il teorema dei segni e la legge di annullamento del prodotto:

		-1		1	
N	$-$	0	$+$		$+$
D	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{N}{D}$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

La disequazione è risolta per

$$x < -1 \vee x > 1$$

La teoria della quale gettiamo le basi si fonda su alcuni elementi, comuni a tutte le teorie matematiche dette assiomatiche.

Concetto primitivo

Ente-relazione del quale non si dà definizione, ci si limita ad elencarne le proprietà.

La teoria della quale gettiamo le basi si fonda su alcuni elementi, comuni a tutte le teorie matematiche dette assiomatiche.

Concetto primitivo

Ente-relazione del quale non si dà definizione, ci si limita ad elencarne le proprietà.

Assioma o postulato

Proposizione che si ritiene vera, nell'ambito della teoria.

La teoria della quale gettiamo le basi si fonda su alcuni elementi, comuni a tutte le teorie matematiche dette assiomatiche.

Concetto primitivo

Ente-relazione del quale non si dà definizione, ci si limita ad elencarne le proprietà.

Assioma o postulato

Proposizione che si ritiene vera, nell'ambito della teoria.

Definizione

Modalità con cui si introducono nuovi elementi nella teoria basandosi su concetti primitivi o altri enti precedentemente definiti.

Teorema

Tesi che si dimostra essere vera, tramite opportuni ragionamenti, a partire da particolari ipotesi coerenti con la teoria.

Iniziamo a costruire una geometria, detta geometria euclidea piana. Gli gli enti primitivi e gli assiomi di seguito presentati sono detti assiomi di Hilbert (i seguenti sono rielaborati e semplificati), sono la base della geometria euclidea dal 1899, in precedenza la geometria si fondava su soli 5 assiomi detti postulati di Euclide (matematico greco vissuto circa trecento anni prima di Cristo). Fino all'inizio del 1900 la geometria euclidea era considerata comunemente l'unica geometria possibile, oggi sappiamo che è possibile costruire anche altre geometrie altrettanto valide e coerenti.

Punto

Concetto primitivo. Solitamente indichiamo i punti con lettere maiuscole dell'alfabeto latino (A, B, C, ...).

Punto

Concetto primitivo. Solitamente indichiamo i punti con lettere maiuscole dell'alfabeto latino (A, B, C, ...).

Retta

Concetto primitivo. Solitamente indichiamo le rette con lettere minuscole dell'alfabeto latino (a, b, c, ...).

Punto

Concetto primitivo. Solitamente indichiamo i punti con lettere maiuscole dell'alfabeto latino (A, B, C, ...).

Retta

Concetto primitivo. Solitamente indichiamo le rette con lettere minuscole dell'alfabeto latino (a, b, c, ...).

Piano

Concetto primitivo. Solitamente indichiamo i piani con lettere minuscole dell'alfabeto greco (α, β, γ, ...).

Assioma di appartenenza 1

Ogni piano π è un insieme di punti, in simboli:

$$\forall \pi, \pi = \{A, B, C, \ldots\}$$

.

Assioma di appartenenza 1

Ogni piano π è un insieme di punti, in simboli:

$$\forall \pi, \pi = \{A, B, C, \ldots\}$$

.

Assioma di appartenenza 2

Ogni retta r è un sottoinsieme di un piano π, in simboli:

$$\forall r, \exists \pi | r \subset \pi$$

.

Assioma di appartenenza 3

Ad ogni retta r appartengono almeno due punti distinti, in simboli:

$$\forall r \exists A \neq B | A, B \in r$$

.

Assioma di appartenenza 3

Ad ogni retta r appartengono almeno due punti distinti, in simboli:

$$\forall r \exists A \neq B | A, B \in r$$

.

Assioma di appartenenza 4

Dati due punti distinti esiste una sola retta alla quale appartengono entrambi, in simboli:

$$\forall A \neq B \exists r | A, B \in r$$

$$A, B \in r \wedge A, B \in s \rightarrow r = s$$

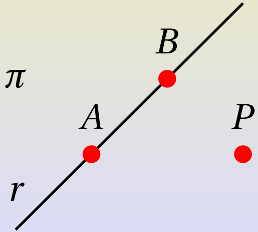
.

Assioma di appartenenza 5

Data una retta r nel piano π esiste almeno un punto del piano che non appartiene ad essa, in simboli:

$$\forall r \subset \pi \exists P | P \notin r \wedge P \in \pi$$

.



Teorema

Due rette distinte hanno in comune al più un punto.

Ipotesi: $r \neq s$

Tesi: $\nexists A \neq B | A \in r, s \wedge B \in r, s$

Dimostrazione:

Teorema

Due rette distinte hanno in comune al più un punto.

Ipotesi: $r \neq s$

Tesi:$\nexists A \neq B | A \in r, s \wedge B \in r, s$

Dimostrazione:

- se $r \cap s = \emptyset \rightarrow \nexists A \in r, s$

Teorema

Due rette distinte hanno in comune al più un punto.

Ipotesi: $r \neq s$

Tesi:$\nexists A \neq B | A \in r, s \land B \in r, s$

Dimostrazione:

- se $r \cap s = \emptyset \rightarrow \nexists A \in r, s$
- se $r \cap s \neq \emptyset \rightarrow \exists A \in r, s$

Teorema

Due rette distinte hanno in comune al più un punto.

Ipotesi: $r \neq s$

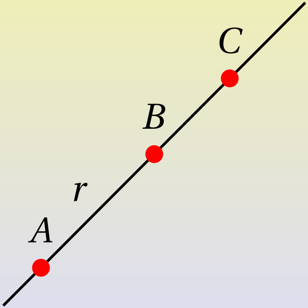
Tesi: $\nexists A \neq B | A \in r, s \wedge B \in r, s$

Dimostrazione:

- se $r \cap s = \emptyset \rightarrow \nexists A \in r, s$
- se $r \cap s \neq \emptyset \rightarrow \exists A \in r, s$
    - se $\exists B \neq A \in r, s \rightarrow r = s$ per l'assioma 4, ma questo contraddice l'ipotesi.

Definizione: punti allineati

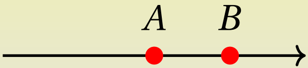
Tre o più punti si dicono allineati se appartengono alla stessa retta.



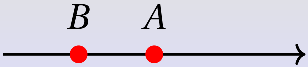
Definizione: retta orientata

Se $A \neq B$ sono punti su una retta orientata è possibile dire se B segue o precede A.

B segue A:



B precede A:



Assioma di ordinamento 6

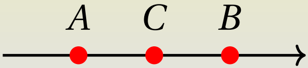
Dati due punti distinti A e B tali che A precede B, esiste sempre un punto C che segue A e precede B, si dice che C è compreso tra A e B.

Assioma di ordinamento 6

Dati due punti distinti A e B tali che A precede B, esiste sempre un punto C che segue A e precede B, si dice che C è compreso tra A e B.

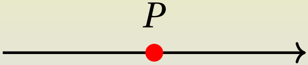
Assioma di ordinamento 6

Dati due punti distinti A e B tali che A precede B, esiste sempre un punto C che segue A e precede B, si dice che C è compreso tra A e B.



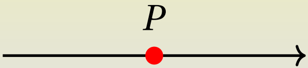
Assioma di ordinamento 7

Dato un punto P su una retta, esistono sempre un punto A che precede P e un punto B che segue P.



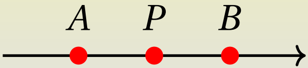
Assioma di ordinamento 7

Dato un punto P su una retta, esistono sempre un punto A che precede P e un punto B che segue P.



Assioma di ordinamento 7

Dato un punto P su una retta, esistono sempre un punto A che precede P e un punto B che segue P.



Definizione: figura geometrica

Una figura geometrica Γ è un qualsiasi sottoinsieme di un piano π, in simboli:

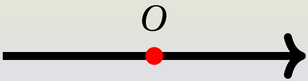
$$\Gamma \subset \pi$$

Definizione: semiretta

Data una retta (orientata) e un punto O su di essa si chiamiamo semiretta ciascuna delle due parti della retta costituite rispettivamente da O e tutti i punti che lo precedono oppure da O e tutti i punti che lo seguono.

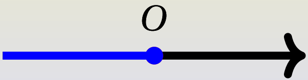
Definizione: semiretta

Data una retta (orientata) e un punto O su di essa si chiamiamo semiretta ciascuna delle due parti della retta costituite rispettivamente da O e tutti i punti che lo precedono oppure da O e tutti i punti che lo seguono.



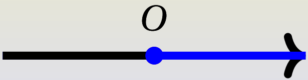
Definizione: semiretta

Data una retta (orientata) e un punto O su di essa si chiamiamo semiretta ciascuna delle due parti della retta costituite rispettivamente da O e tutti i punti che lo precedono oppure da O e tutti i punti che lo seguono.



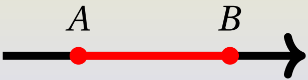
Definizione: semiretta

Data una retta (orientata) e un punto O su di essa si chiamiamo semiretta ciascuna delle due parti della retta costituite rispettivamente da O e tutti i punti che lo precedono oppure da O e tutti i punti che lo seguono.



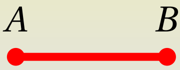
Definizione: segmento

Dati due punti A e B su una retta (orientata), chiamiamo segmento l'insieme dei punti A e B e di tutti i punti compresi tra essi. A e B si dicono estremi del segmento, gli altri punti del segmento si dicono punti interni.



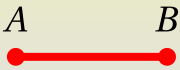
Definizione: prolungamento

La semiretta di origine B che non contiene A si dice prolungamento del segmento AB dalla parte di B.



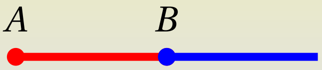
Definizione: prolungamento

La semiretta di origine B che non contiene A si dice prolungamento del segmento AB dalla parte di B.



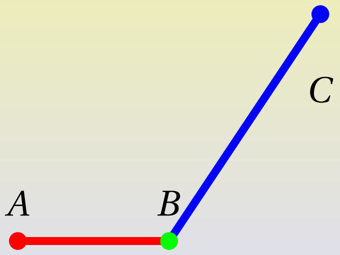
Definizione: prolungamento

La semiretta di origine B che non contiene A si dice prolungamento del segmento AB dalla parte di B.



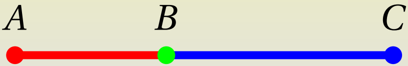
Definizione: segmenti consecutivi

Due segmenti che hanno in comune **solamente un** estremo si dicono consecutivi.



Definizione: segmenti adiacenti

Due segmenti consecutivi che giacciono sulla stessa retta si dicono adiacenti.



Definizione: poligonale

Si chiama poligonale un insieme ordinato di segmenti tali che:

.

Definizione: poligonale

Si chiama poligonale un insieme ordinato di segmenti tali che:

- ciascun segmento e il successivo siano consecutivi ma non adiacenti

.

Definizione: poligonale

Si chiama poligonale un insieme ordinato di segmenti tali che:

- ciascun segmento e il successivo siano consecutivi ma non adiacenti
- ciascun estremo dei segmenti sia in comune al massimo a due dei segmenti della poligonale. I segmenti si dicono lati della poligonale e i loro estremi vertici.

.

Definizione: primo estremo

Il primo estremo di una poligonale è l'estremo del primo segmento che non è in comune con il secondo segmento.

Definizione: primo estremo

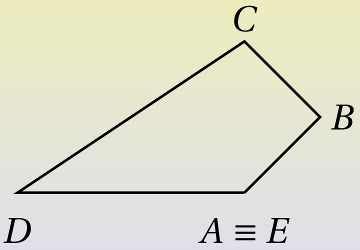
Il primo estremo di una poligonale è l'estremo del primo segmento che non è in comune con il secondo segmento.

Definizione: ultimo estremo

L'ultimo estremo di una poligonale è l'estremo dell'ultimo segmento che non è in comune con il penultimo segmento.

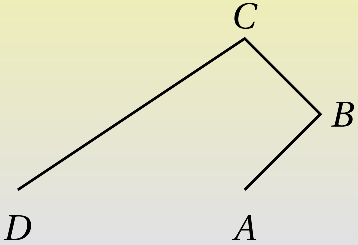
Definizione: poligonale chiusa

Se primo e ultimo estremo di un poligonale coincidono la poligonale si dice chiusa.



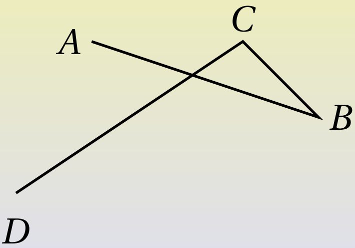
Definizione: poligonale aperta

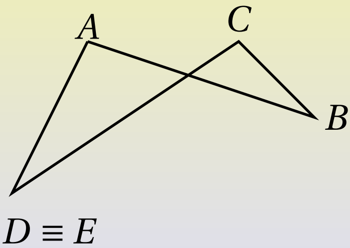
Una poligonale non chiusa si dice aperta.



Definizione: poligonale intrecciata

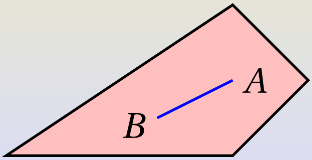
Se due lati non consecutivi di una poligonale hanno un punto in comune, la poligonale si dice intrecciata.

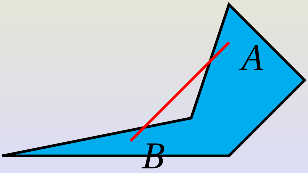




Definizione: figura convessa

Una figura geometrica Γ si dice convessa se comunque scelti due punti $A, B \in \Gamma$, il segmento AB è tutto contenuto in Γ.



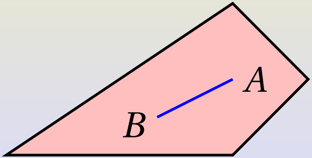


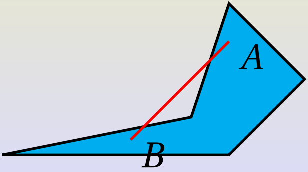
Definizione: figura convessa

Una figura geometrica Γ si dice convessa se comunque scelti due punti $A, B \in \Gamma$, il segmento AB è tutto contenuto in Γ.

Definizione: figura concava

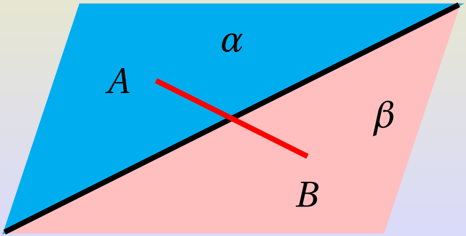
Una figura geometrica Γ si dice concava se non è convessa.





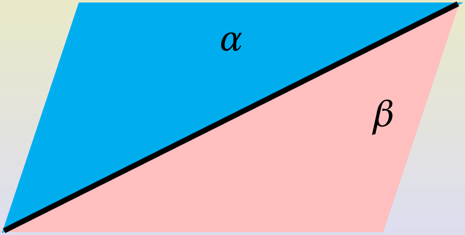
Assioma di partizione del piano da parte di una retta 8

L'insieme dei punti del piano che non appartengono ad una data retta r resta diviso da r in due sottoinsiemi disgiunti e convessi, che chiamiamo α e β, tali che, se $A \in \alpha$ e $B \in \beta$ allora AB interseca r in un solo punto.



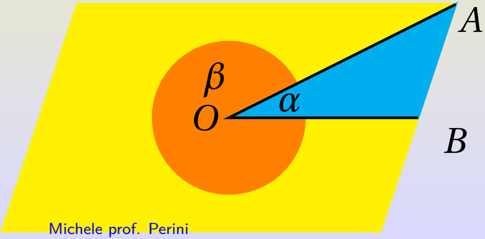
Definizione: semipiano

Data una retta in un piano, si chiama semipiano, la figura costituita dalla retta e da una delle parti, α e β, in cui il piano è suddiviso dalla retta stessa. La retta si dice origine o frontiera del semipiano.



Definizione: angolo

Date in un piano, due semirette aventi la stessa origine, si chiama angolo la figura costituita dalle due semirette e da una delle parti in cui il piano è suddiviso dalle rette stesse. L'origine si chiama vertice dell'angolo e le due semirette lati dell'angolo.

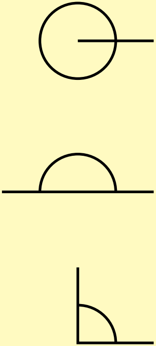


Solitamente l'angolo convesso si indica con α oppure con $\widehat{AOB}$

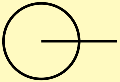
Angoli

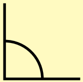
Angoli

Angoli



Angoli

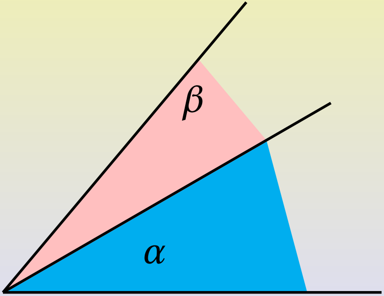




Angolo giro:
$\gamma = 2\pi$
Angolo piatto:
$\gamma = \pi$
Angolo retto:
$\gamma = \frac{\pi}{2}$

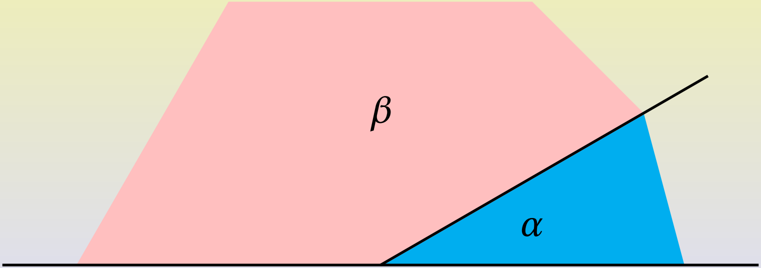
Definizione: angoli consecutivi

Due angoli si dicono consecutivi se hanno in lo stesso vertice e hanno in comune i punti di un lato.



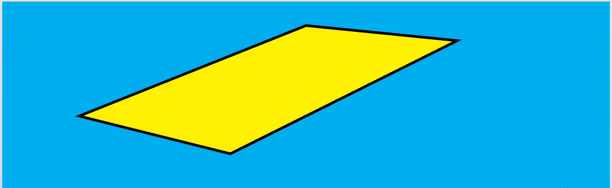
Definizione: angoli adiacenti

Due angoli si dicono adiacenti se sono consecutivi e i lati non in comune appartengono alla stessa retta.



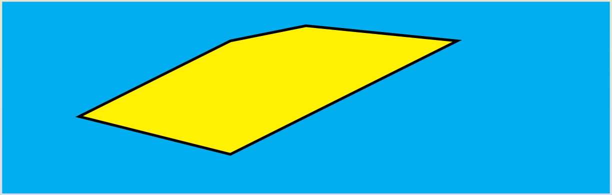
Assioma di partizione del piano da parte di una poligonale chiusa 9

Data una qualsiasi poligonale chiusa non intrecciata, essa divide l'insieme dei punti del piano che non le appartengono in due sottoinsiemi, uno che non può contenere rette, i cui punti vengono detti interni alla poligonale e uno che contiene delle rette, i cui punti vengono detti esterni alla poligonale.



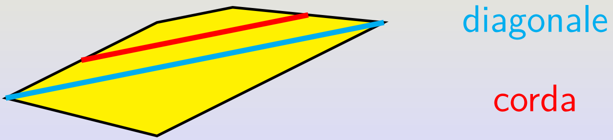
Definizione: poligono

Data una qualsiasi poligonale chiusa non intrecciata, si chiama poligono l'insieme dei punti della poligonale e dei punti interni ad essa. I vertici e i lati della poligonale si chiamano vertici e lati del poligono.



Definizione: diagonale

Ogni segmento che congiunge due vertici non consecutivi di un poligono.

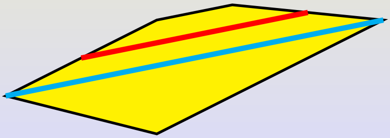


Definizione: diagonale

Ogni segmento che congiunge due vertici non consecutivi di un poligono.

Definizione: corda

Ogni segmento che congiunge due punti del contorno del poligono appartenenti a due lati distinti.

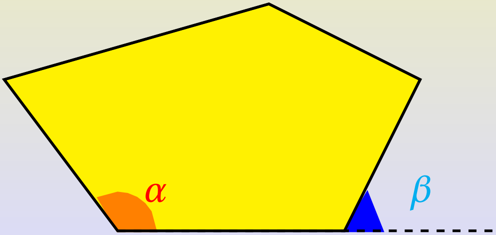


diagonale

corda

Definizione: angolo interno

Angolo individuato da due lati consecutivi del poligono e dal vertice in comune ai due lati .

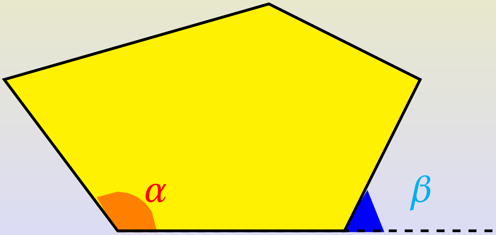


Definizione: angolo interno

Angolo individuato da due lati consecutivi del poligono e dal vertice in comune ai due lati .

Definizione: angolo esterno

Ogni angolo adiacente ad un angolo interno.



Assioma di congruenza 10

Due figure F_1 e F_2 si dicono congruenti, $F_1 \cong F_2$, se per loro valgono le proprietà:

Assioma di congruenza 10

Due figure F_1 e F_2 si dicono congruenti, $F_1 \cong F_2$, se per loro valgono le proprietà:

riflessiva $F_1 \cong F_1$

Assioma di congruenza 10

Due figure F_1 e F_2 si dicono congruenti, $F_1 \cong F_2$, se per loro valgono le proprietà:

riflessiva $F_1 \cong F_1$

simmetrica $F_1 \cong F_2 \rightarrow F_2 \cong F_1$

Assioma di congruenza 10

Due figure F_1 e F_2 si dicono congruenti, $F_1 \cong F_2$, se per loro valgono le proprietà:

- riflessiva $F_1 \cong F_1$
- simmetrica $F_1 \cong F_2 \rightarrow F_2 \cong F_1$
- transitiva $F_1 \cong F_2 \wedge F_2 \cong F_3 \rightarrow F_1 \cong F_3$

Assioma di congruenza di punti rette e piani 11

Tutti i punti sono congruenti tra loro.
Tutte le rette sono congruenti tra loro.
Tutti i piani sono congruenti tra loro.
Tutte le semirette sono congruenti tra loro.
Tutti i semipiani sono congruenti tra loro.

Assioma del trasporto di segmenti 12

Dato un segmento AB e una semiretta di origine O, esiste un unico punto P tale che $OP \cong AB$.

Questi assiomi ci assicurano di poter spostare segmenti e angoli senza modificarli.

Assioma del trasporto di segmenti 12

Dato un segmento AB e una semiretta di origine O, esiste un unico punto P tale che $OP \cong AB$.

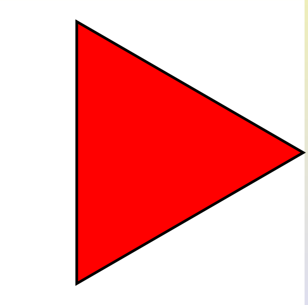
Assioma del trasporto di angoli 13

Dato un angolo $\widehat{AOB}$ di vertice O, un punto O' e una semiretta di origine O' passante per A', esiste un'unica semiretta passante per B' tale che $\widehat{AOB} \cong \widehat{A'O'B'}$.

Questi assiomi ci assicurano di poter spostare segmenti e angoli senza modificarli.

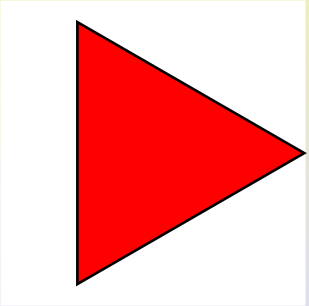
Definizione: poligono regolare

Un poligono che ha tutti i lati congruenti e tutti gli angoli congruenti si dice regolare.



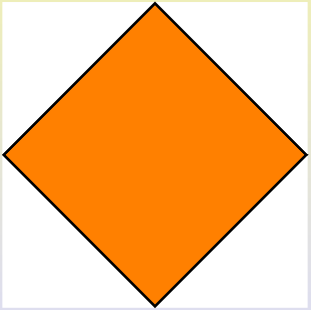
Definizione: poligono regolare

Un poligono che ha tutti i lati congruenti e tutti gli angoli congruenti si dice regolare.



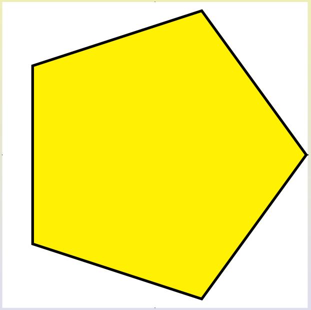
Definizione: poligono regolare

Un poligono che ha tutti i lati congruenti e tutti gli angoli congruenti si dice regolare.



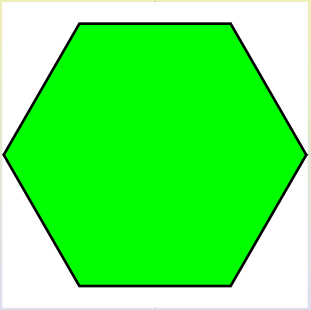
Definizione: poligono regolare

Un poligono che ha tutti i lati congruenti e tutti gli angoli congruenti si dice regolare.



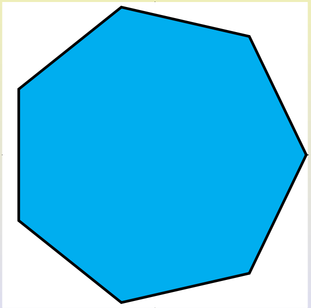
Definizione: poligono regolare

Un poligono che ha tutti i lati congruenti e tutti gli angoli congruenti si dice regolare.



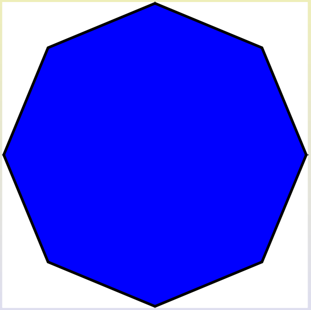
Definizione: poligono regolare

Un poligono che ha tutti i lati congruenti e tutti gli angoli congruenti si dice regolare.



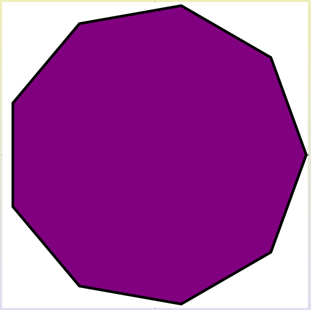
Definizione: poligono regolare

Un poligono che ha tutti i lati congruenti e tutti gli angoli congruenti si dice regolare.



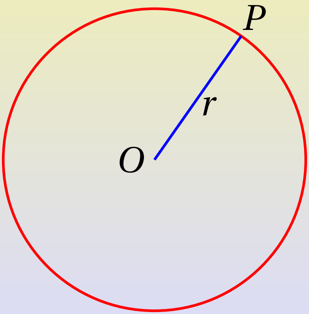
Definizione: poligono regolare

Un poligono che ha tutti i lati congruenti e tutti gli angoli congruenti si dice regolare.



Definizione: circonferenza

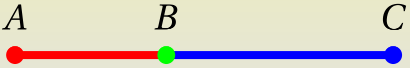
Dato un punto O e un segmento r, chiamiamo circonferenza di centro O e raggio r, l'insieme dei punti P del piano tali che $OP \cong r$.



L'assioma del trasporto permette di definire la somma, la differenza, i multipli e i sottomultipli di un segmento. Grazie a questo un numero qualsiasi di segmenti può essere riportato in modo univoco su una semiretta costituendo una sequenza di segmenti adiacenti.

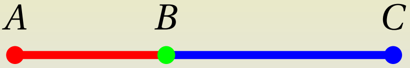
Somma tra segmenti:

$$AB + BC \cong AC$$



Differenza tra segmenti:

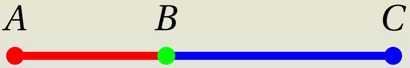
$$AC - BC \cong AB$$



Confronto tra segmenti:

$$AC > AB$$

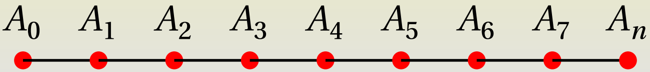
$$BC < AC$$



Multipli e sottomultipli di un segmento:

$$A_0A_n \cong nA_0A_1$$

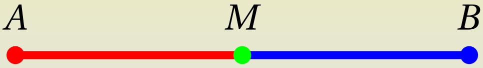
$$A_0A_1 \cong \frac{1}{n}A_0A_n$$



Essendo i segmenti A_iA_{i+1} tutti congruenti tra loro.

Definizione: punto medio

M si dice punto medio del segmento AB se è un punto appartenente al segmento tale che $AM \cong MB$.



Si può dimostrare che il punto medio di un segmento è unico.

Assioma della misura di un segmento 14

Dato un certo segmento AB esiste un solo numero reale positivo k che esprime la misura $\overline{AB}$ del segmento rispetto ad un segmento unità di misura.

Assioma della misura di un segmento 14

Dato un certo segmento AB esiste un solo numero reale positivo k che esprime la misura $\overline{AB}$ del segmento rispetto ad un segmento unità di misura.

Proprietà della misura di un segmento

Assioma della misura di un segmento 14

Dato un certo segmento AB esiste un solo numero reale positivo k che esprime la misura $\overline{AB}$ del segmento rispetto ad un segmento unità di misura.

Proprietà della misura di un segmento

- se $AB \cong CD$ allora $\overline{AB} = \overline{CD}$

Assioma della misura di un segmento 14

Dato un certo segmento AB esiste un solo numero reale positivo k che esprime la misura $\overline{AB}$ del segmento rispetto ad un segmento unità di misura.

Proprietà della misura di un segmento

- se $AB \cong CD$ allora $\overline{AB} = \overline{CD}$
- se $AB < CD$ allora $\overline{AB} < \overline{CD}$

Assioma della misura di un segmento 14

Dato un certo segmento AB esiste un solo numero reale positivo k che esprime la misura $\overline{AB}$ del segmento rispetto ad un segmento unità di misura.

Proprietà della misura di un segmento

- se $AB \cong CD$ allora $\overline{AB} = \overline{CD}$
- se $AB < CD$ allora $\overline{AB} < \overline{CD}$
- se $AC \cong AB + BC$ allora $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

Assioma della misura di un segmento 14

Dato un certo segmento AB esiste un solo numero reale positivo k che esprime la misura $\overline{AB}$ del segmento rispetto ad un segmento unità di misura.

Proprietà della misura di un segmento

- se $AB \cong CD$ allora $\overline{AB} = \overline{CD}$
- se $AB < CD$ allora $\overline{AB} < \overline{CD}$
- se $AC \cong AB + BC$ allora $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

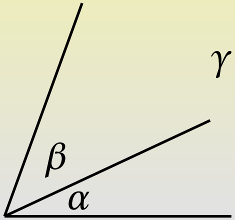
Definizione: distanza

Si dice distanza tra due punti AB la misura del segmento $\overline{AB}$.

L'assioma del trasporto permette di definire la somma, la differenza, i multipli e i sottomultipli di un angolo. Grazie a questo un numero qualsiasi di angoli può essere riportato in modo univoco come sequenza di angoli consecutivi.

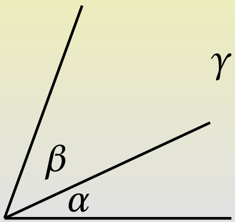
Somma tra angoli:

$$\alpha + \beta \cong \gamma$$



Differenza tra angoli:

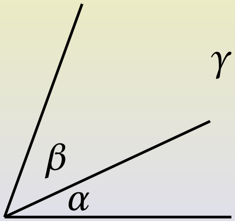
$$\gamma - \beta \cong \alpha$$



Confronto tra angoli:

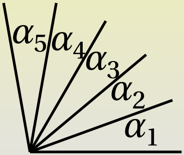
$$\alpha < \gamma$$

$$\gamma > \beta$$



Multipli e sottomultipli di un angolo:

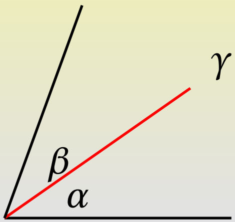
$$\gamma \cong n\alpha_1, \alpha_1 \cong \frac{1}{n}\gamma$$



Essendo gli angoli α_i tutti congruenti tra loro.

Definizione: bisettrice

La bisettrice di un angolo γ è la semiretta avente origine nel vertice dell'angolo tale che per gli angoli α e β valgano le relazioni: $\alpha \cong \beta$ e $\alpha + \beta \cong \gamma$.



Si può dimostrare che la bisettrice di un angolo è unica.

Assioma della misura di un angolo 15

Dato un certo angolo $\widehat{FAG}$ esiste un solo numero reale positivo α che esprime la misura dell'angolo rispetto ad un angolo unità di misura.

Assioma della misura di un angolo 15

Dato un certo angolo $\widehat{FAG}$ esiste un solo numero reale positivo α che esprime la misura dell'angolo rispetto ad un angolo unità di misura.

Proprietà della misura di un angolo

Assioma della misura di un angolo 15

Dato un certo angolo $\widehat{FAG}$ esiste un solo numero reale positivo α che esprime la misura dell'angolo rispetto ad un angolo unità di misura.

Proprietà della misura di un angolo

- se $\widehat{FAG} \cong \widehat{HBJ}$ allora $\alpha = \beta$

Assioma della misura di un angolo 15

Dato un certo angolo $\widehat{FAG}$ esiste un solo numero reale positivo α che esprime la misura dell'angolo rispetto ad un angolo unità di misura.

Proprietà della misura di un angolo

- se $\widehat{FAG} \cong \widehat{HBJ}$ allora $\alpha = \beta$
- se $\widehat{FAG} < \widehat{HBJ}$ allora $\alpha < \beta$

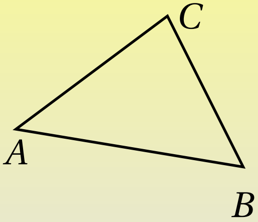
Assioma della misura di un angolo 15

Dato un certo angolo $\widehat{FAG}$ esiste un solo numero reale positivo α che esprime la misura dell'angolo rispetto ad un angolo unità di misura.

Proprietà della misura di un angolo

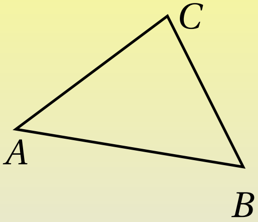
- se $\widehat{FAG} \cong \widehat{HBJ}$ allora $\alpha = \beta$
- se $\widehat{FAG} < \widehat{HBJ}$ allora $\alpha < \beta$
- se $\widehat{FCG} \cong \widehat{HAJ} + \widehat{KBL}$ allora $\gamma = \alpha + \beta$

Classificazione dei triangoli in base ai lati



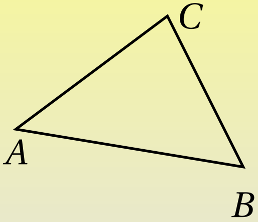
- se $AB \cong BC \cong CA$ il triangolo si dice **equilatero**

Classificazione dei triangoli in base ai lati



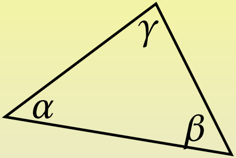
- se $AB \cong BC \cong CA$ il triangolo si dice **equilatero**
- se $AB \cong BC$ il triangolo si dice **isoscele**

Classificazione dei triangoli in base ai lati



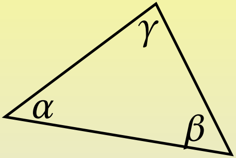
- se $AB \cong BC \cong CA$ il triangolo si dice **equilatero**
- se $AB \cong BC$ il triangolo si dice **isoscele**
- altrimenti si dice **scaleno**

Classificazione dei triangoli in base agli angoli



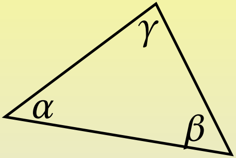
- se $\alpha < \frac{\pi}{2} \wedge \beta < \frac{\pi}{2} \wedge \gamma < \frac{\pi}{2}$ il triangolo si dice **acutangolo**

Classificazione dei triangoli in base agli angoli



- se $\alpha < \frac{\pi}{2} \wedge \beta < \frac{\pi}{2} \wedge \gamma < \frac{\pi}{2}$ il triangolo si dice **acutangolo**
- se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ il triangolo si dice **rettangolo**

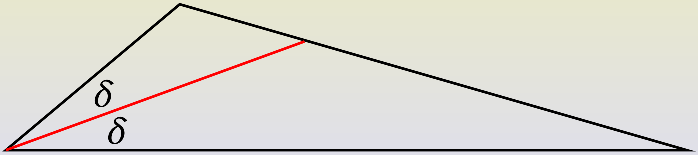
Classificazione dei triangoli in base agli angoli



- se $\alpha < \frac{\pi}{2} \wedge \beta < \frac{\pi}{2} \wedge \gamma < \frac{\pi}{2}$ il triangolo si dice **acutangolo**
- se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ il triangolo si dice **rettangolo**
- se $\alpha > \frac{\pi}{2}$ il triangolo si dice **ottusangolo**

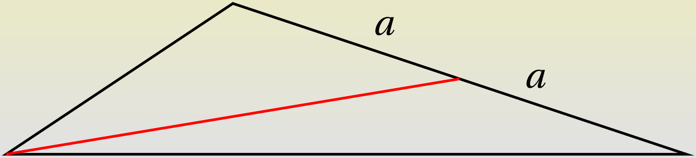
Definizione: bisettrice di un angolo di un triangolo

La bisettrice di un angolo di un triangolo è il segmento costituito dai punti dalla bisettrice di quell'angolo che appartengono al triangolo.



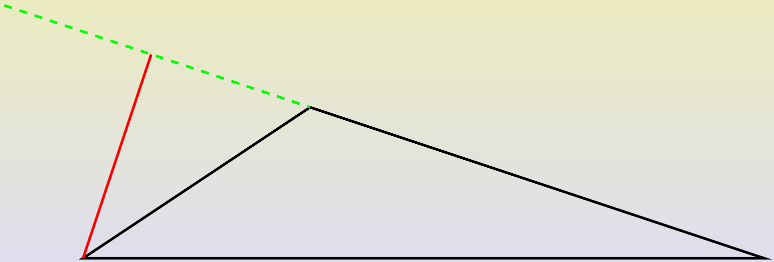
Definizione: mediana

Una mediana è un segmento che congiunge un vertice del triangolo con il punto medio del lato opposto.

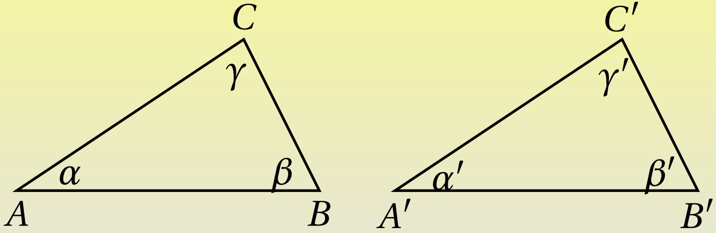


Definizione: altezza

Una altezza è un segmento passante per un vertice e formante due angoli retti con il lato opposto al vertice o con un suo prolungamento.



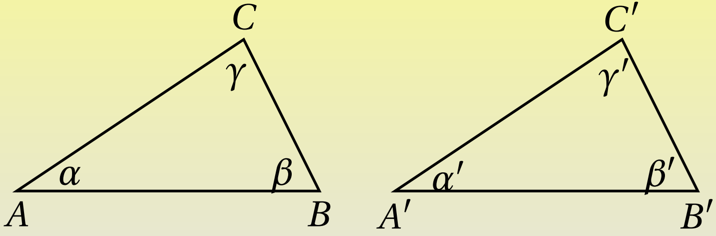
Triangoli congruenti



Due triangoli si dicono congruenti se:

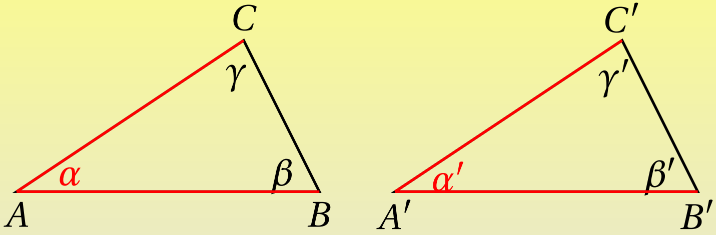
- $AB \cong A'B' \wedge BC \cong B'C' \wedge CA \cong C'A'$ e

Triangoli congruenti



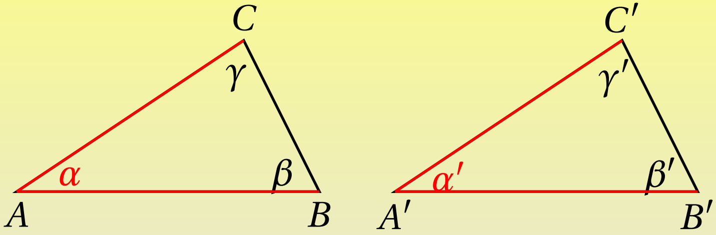
Due triangoli si dicono congruenti se:

- $AB \cong A'B' \wedge BC \cong B'C' \wedge CA \cong C'A'$ e
- $\alpha \cong \alpha' \wedge \beta \cong \beta' \wedge \gamma \cong \gamma'$



Assioma: primo criterio di congruenza

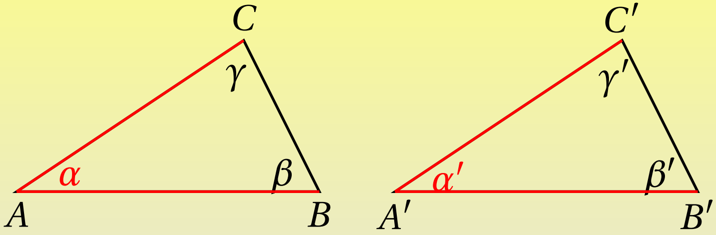
$ABC \cong A'B'C'$ se



Assioma: primo criterio di congruenza

$ABC \cong A'B'C'$ se

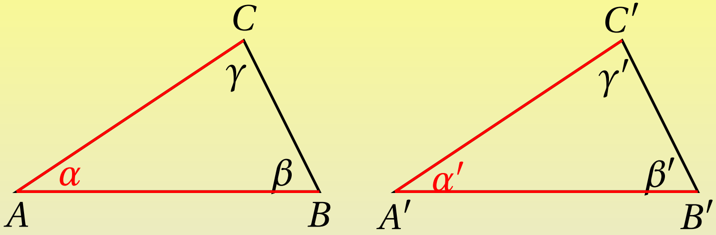
- $AB \cong A'B'$



Assioma: primo criterio di congruenza

$ABC \cong A'B'C'$ se

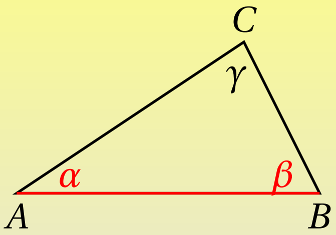
- $AB \cong A'B'$
- $AC \cong A'C'$



Assioma: primo criterio di congruenza

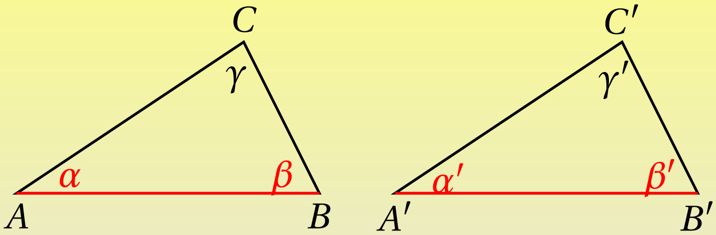
$ABC \cong A'B'C'$ se

- $AB \cong A'B'$
- $AC \cong A'C'$
- $\alpha \cong \alpha'$



Teorema: secondo criterio di congruenza

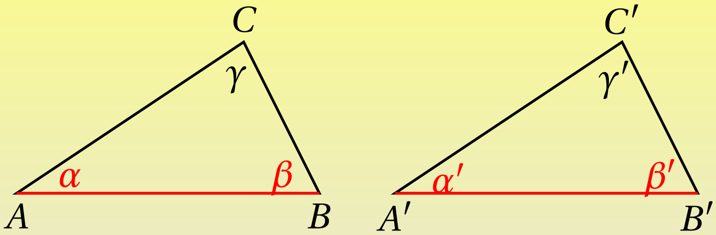
$ABC \cong A'B'C'$ se



Teorema: secondo criterio di congruenza

$ABC \cong A'B'C'$ se

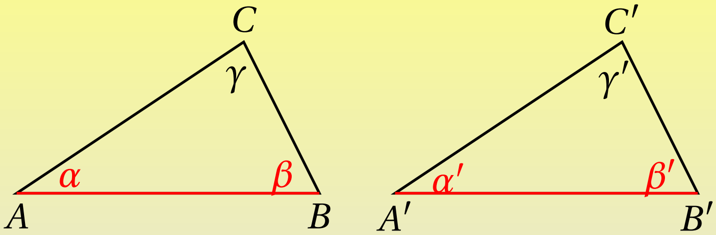
- $AB \cong A'B'$



Teorema: secondo criterio di congruenza

$ABC \cong A'B'C'$ se

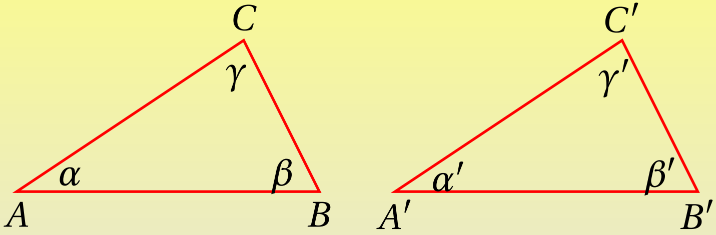
- $AB \cong A'B'$
- $\alpha \cong \alpha'$



Teorema: secondo criterio di congruenza

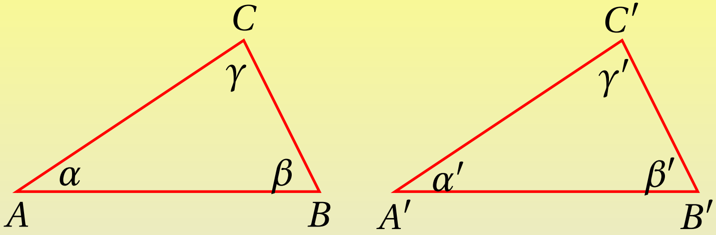
$ABC \cong A'B'C'$ se

- $AB \cong A'B'$
- $\alpha \cong \alpha'$
- $\beta \cong \beta'$



Teorema: terzo criterio di congruenza

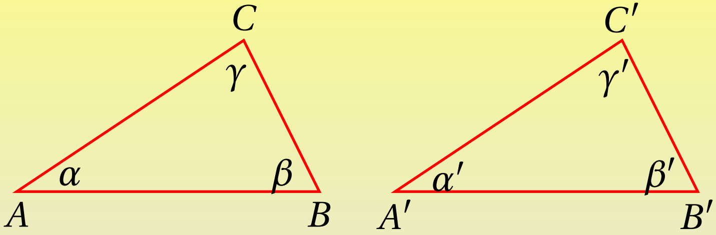
$ABC \cong A'B'C'$ se



Teorema: terzo criterio di congruenza

$ABC \cong A'B'C'$ se

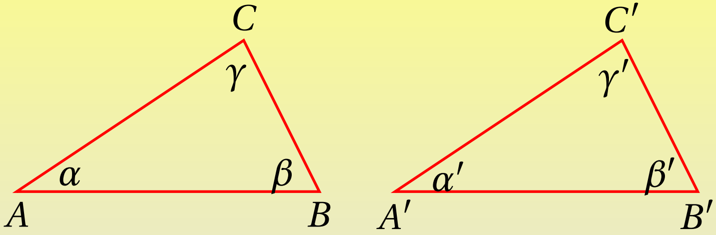
- $AB \cong A'B'$



Teorema: terzo criterio di congruenza

$ABC \cong A'B'C'$ se

- $AB \cong A'B'$
- $BC \cong B'C'$



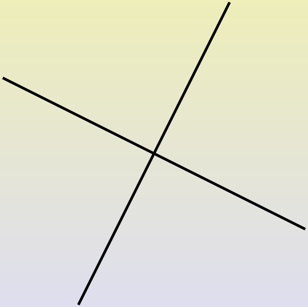
Teorema: terzo criterio di congruenza

$ABC \cong A'B'C'$ se

- $AB \cong A'B'$
- $BC \cong B'C'$
- $CA \cong C'A'$

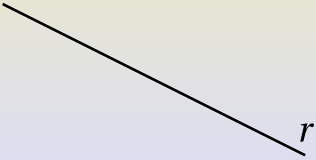
Definizione: perpendicolare ($\perp$)

Due rette incidenti, che incontrandosi, formano quattro angoli retti, si dicono perpendicolari.



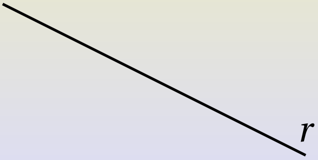
Teorema: esistenza ed unicità della perpendicolare

Data una retta r e un punto P, esiste un'unica retta s passante per P e perpendicolare a r.
(dimostrazione omessa)



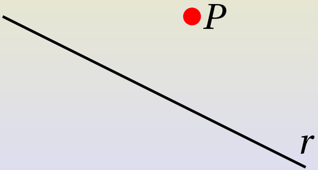
Teorema: esistenza ed unicità della perpendicolare

Data una retta r e un punto P, esiste un'unica retta s passante per P e perpendicolare a r.
(dimostrazione omessa)



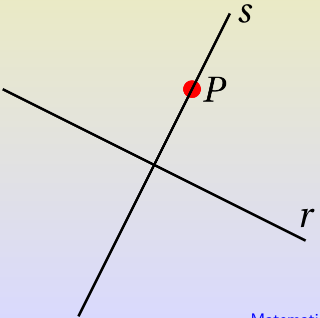
Teorema: esistenza ed unicità della perpendicolare

Data una retta r e un punto P, esiste un'unica retta s passante per P e perpendicolare a r.
(dimostrazione omessa)



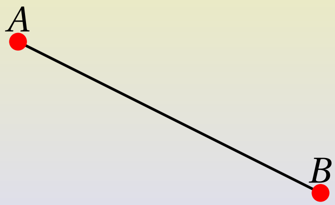
Teorema: esistenza ed unicità della perpendicolare

Data una retta r e un punto P, esiste un'unica retta s passante per P e perpendicolare a r.
(dimostrazione omessa)



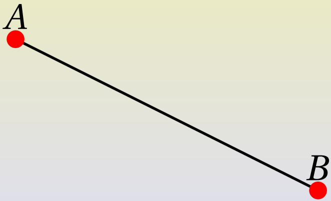
Definizione: asse di un segmento

Dato un segmento AB, si chiama asse di AB la retta s passante per il punto medio di AB e perpendicolare ad AB.



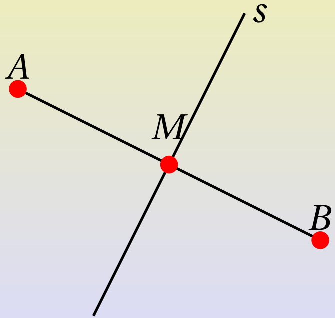
Definizione: asse di un segmento

Dato un segmento AB, si chiama asse di AB la retta s passante per il punto medio di AB e perpendicolare ad AB.



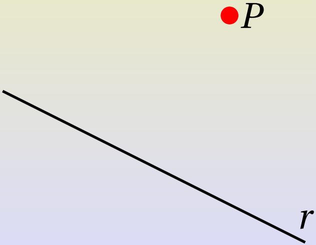
Definizione: asse di un segmento

Dato un segmento AB, si chiama asse di AB la retta s passante per il punto medio di AB e perpendicolare ad AB.



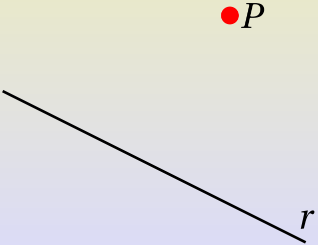
Definizione: proiezione di un punto su una retta

Dati una retta r e un punto P, il punto H di intersezione tra la retta r e la perpendicolare condotta da P a r si chiama proiezione ortogonale di P su r.



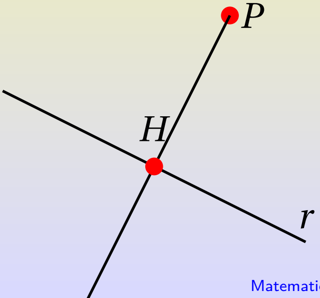
Definizione: proiezione di un punto su una retta

Dati una retta r e un punto P, il punto H di intersezione tra la retta r e la perpendicolare condotta da P a r si chiama proiezione ortogonale di P su r.



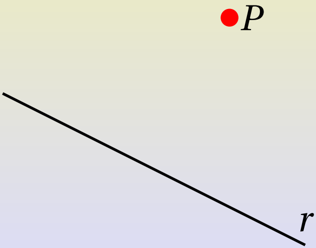
Definizione: proiezione di un punto su una retta

Dati una retta r e un punto P, il punto H di intersezione tra la retta r e la perpendicolare condotta da P a r si chiama proiezione ortogonale di P su r.



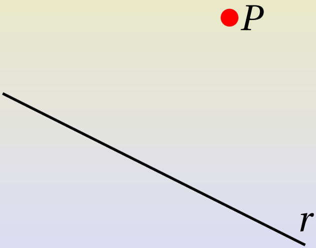
Definizione: distanza di un punto da una retta

Dati una retta r e un punto P, si chiama distanza di P da r la lunghezza del segmento PH, con H proiezione di P su r.



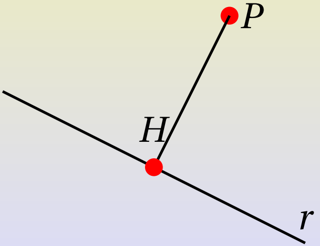
Definizione: distanza di un punto da una retta

Dati una retta r e un punto P, si chiama distanza di P da r la lunghezza del segmento PH, con H proiezione di P su r.



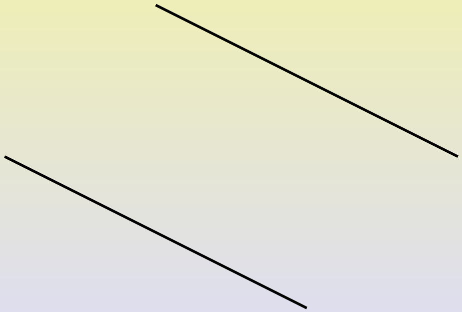
Definizione: distanza di un punto da una retta

Dati una retta r e un punto P, si chiama distanza di P da r la lunghezza del segmento PH, con H proiezione di P su r.



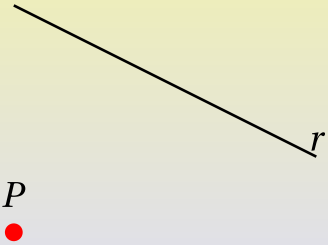
Definizione: parallela ($\parallel$)

Due rette si dicono parallele se non hanno punti di intersezione o se coincidono.



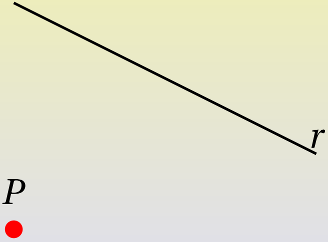
Assioma: unicità della parallela (o quinto postulato di Euclide) 16.

Data una retta r e un punto P esterno ad essa esiste una sola retta s parallela a r passante per P.



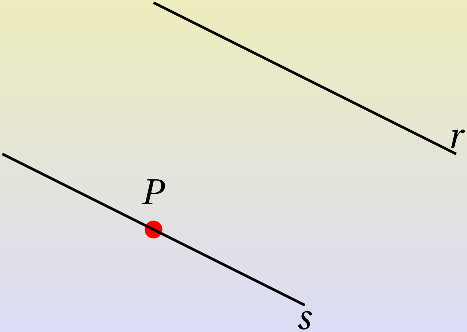
Assioma: unicità della parallela (o quinto postulato di Euclide) 16.

Data una retta r e un punto P esterno ad essa esiste una sola retta s parallela a r passante per P.



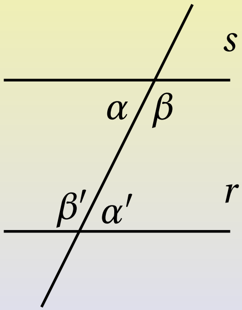
Assioma: unicità della parallela (o quinto postulato di Euclide) 16.

Data una retta r e un punto P esterno ad essa esiste una sola retta s parallela a r passante per P.

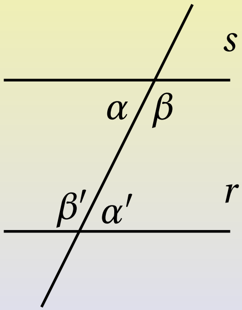


Criteri di parallelismo (1): $r \parallel s$ se e solo se

Criteri di parallelismo (1): $r \parallel s$ se e solo se



Criteri di parallelismo (1): $r \parallel s$ se e solo se



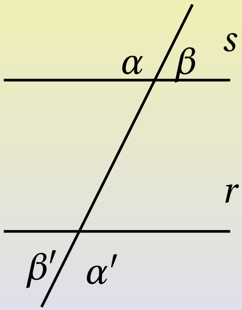
formano angoli alterni interni congruenti se tagliate da una trasversale.

$$\alpha \cong \alpha'$$

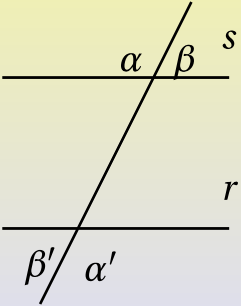
$$\beta \cong \beta'$$

Criteri di parallelismo (2): $r \parallel s$ se e solo se

Criteri di parallelismo (2): $r \parallel s$ se e solo se



Criteri di parallelismo (2): $r \parallel s$ se e solo se



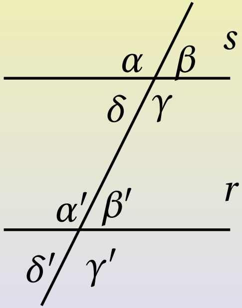
formano angoli alterni esterni congruenti se tagliate da una trasversale.

$$\alpha \cong \alpha'$$

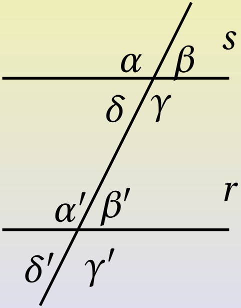
$$\beta \cong \beta'$$

Criteri di parallelismo (3): $r \parallel s$ se e solo se

Criteri di parallelismo (3): $r \parallel s$ se e solo se



Criteri di parallelismo (3): $r \parallel s$ se e solo se



formano angoli corrispondenti congruenti se tagliate da una trasversale.

$$\alpha \cong \alpha'$$

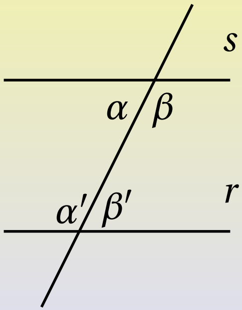
$$\beta \cong \beta'$$

$$\gamma \cong \gamma'$$

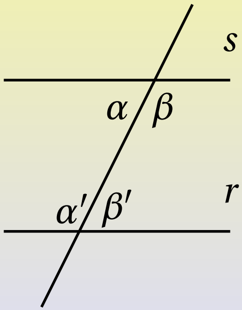
$$\delta \cong \delta'$$

Criteri di parallelismo (4): $r \parallel s$ se e solo se

Criteri di parallelismo (4): $r \parallel s$ se e solo se



Criteri di parallelismo (4): $r \parallel s$ se e solo se



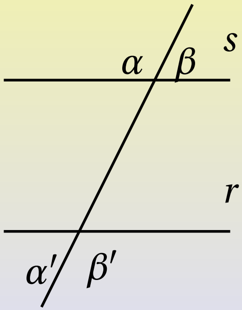
formano angoli coniugati interni supplementari se tagliate da una trasversale.

$$\alpha + \alpha' \cong \pi$$

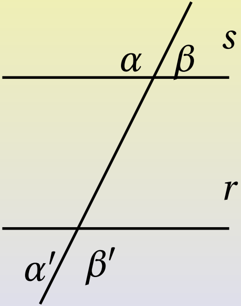
$$\beta + \beta' \cong \pi$$

Criteri di parallelismo (5): $r \parallel s$ se e solo se

Criteri di parallelismo (5): $r \parallel s$ se e solo se



Criteri di parallelismo (5): $r \parallel s$ se e solo se



formano angoli coniugati esterni supplementari se tagliate da una trasversale.

$$\alpha + \alpha' \cong \pi$$

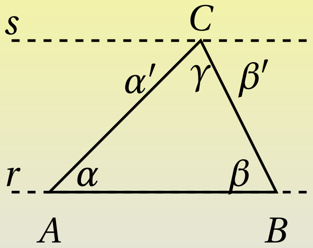
$$\beta + \beta' \cong \pi$$

Teorema della somma degli angoli interni di un triangolo

Dimostrazione:
$\alpha \cong \alpha'$ perché angoli alterni interni delle parallele r e s tagliate dalla trasversale AC.
$\beta \cong \beta'$ perché angoli alterni interni delle parallele r e s tagliate dalla trasversale CB.

$\alpha' + \beta' + \gamma \cong \pi \rightarrow \alpha + \beta + \gamma \cong \pi$

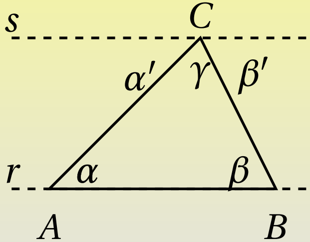
Teorema della somma degli angoli interni di un triangolo



Dimostrazione:
$\alpha \cong \alpha'$ perché angoli alterni interni delle parallele r e s tagliate dalla trasversale AC.
$\beta \cong \beta'$ perché angoli alterni interni delle parallele r e s tagliate dalla trasversale CB.

$\alpha' + \beta' + \gamma \cong \pi \rightarrow \alpha + \beta + \gamma \cong \pi$

Teorema della somma degli angoli interni di un triangolo



Ipotesi:

$$r \parallel s$$

Tesi:

$$\alpha + \beta + \gamma \cong \pi$$

Dimostrazione:
$\alpha \cong \alpha'$ perché angoli alterni interni delle parallele r e s tagliate dalla trasversale AC.
$\beta \cong \beta'$ perché angoli alterni interni delle parallele r e s tagliate dalla trasversale CB.

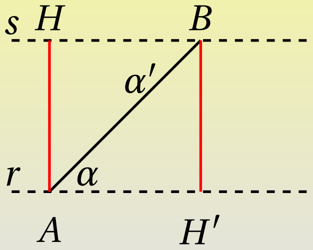
$$\alpha' + \beta' + \gamma \cong \pi \rightarrow \alpha + \beta + \gamma \cong \pi$$

Teorema della distanza tra rette parallele

Dimostrazione:

$\alpha \cong \alpha'$ perché angoli alterni interni delle parallele r e s tagliate dalla trasversale AB. $\widehat{HAB} \cong \frac{\pi}{2} - \alpha' \cong \frac{\pi}{2} - \alpha \cong \widehat{H'BA}$. I triangoli AHB e $AH'B$ sono congruenti per il secondo criterio di congruenza da cui la tesi.

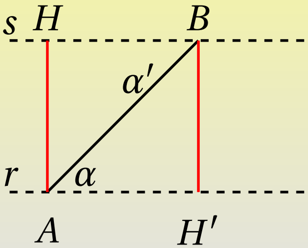
Teorema della distanza tra rette parallele



Dimostrazione:

$\alpha \cong \alpha'$ perché angoli alterni interni delle parallele r e s tagliate dalla trasversale AB. $\widehat{HAB} \cong \frac{\pi}{2} - \alpha' \cong \frac{\pi}{2} - \alpha \cong \widehat{H'BA}$. I triangoli AHB e $AH'B$ sono congruenti per il secondo criterio di congruenza da cui la tesi.

Teorema della distanza tra rette parallele



Ipotesi:

$$r \parallel s$$

$$\widehat{AHB} = \widehat{BH'A} = \frac{\pi}{2}$$

Tesi:

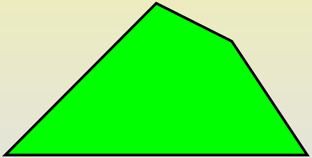
$$AH \cong BH'$$

Dimostrazione:

$\alpha \cong \alpha'$ perché angoli alterni interni delle parallele r e s tagliate dalla trasversale AB. $\widehat{HAB} \cong \frac{\pi}{2} - \alpha' \cong \frac{\pi}{2} - \alpha \cong \widehat{H'BA}$. I triangoli AHB e $AH'B$ sono congruenti per il secondo criterio di congruenza da cui la tesi.

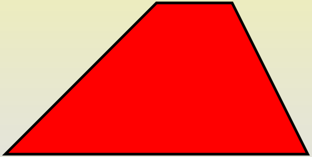
Quadrilatero

Poligono con quattro lati.



Trapezio

Quadrilatero con almeno due lati paralleli.



Parallelogramma

Quadrilatero con lati opposti paralleli.

Un quadrilatero è un parallelogramma se:

Parallelogramma

Quadrilatero con lati opposti paralleli.

Un quadrilatero è un parallelogramma se:

1. ha i lati opposti paralleli

Parallelogramma

Quadrilatero con lati opposti paralleli.

Un quadrilatero è un parallelogramma se:

1. ha i lati opposti paralleli
2. ha i lati opposti congruenti

Parallelogramma

Quadrilatero con lati opposti paralleli.

Un quadrilatero è un parallelogramma se:

1. ha i lati opposti paralleli
2. ha i lati opposti congruenti
3. ha gli angoli opposti congruenti

Parallelogramma

Quadrilatero con lati opposti paralleli.

Un quadrilatero è un parallelogramma se:

1. ha i lati opposti paralleli
2. ha i lati opposti congruenti
3. ha gli angoli opposti congruenti
4. ha le diagonali che si intersecano nel loro punto medio

Parallelogramma

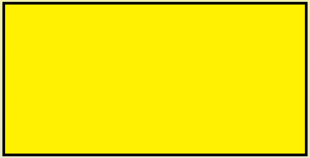
Quadrilatero con lati opposti paralleli.

Un quadrilatero è un parallelogramma se:

1. ha i lati opposti paralleli
2. ha i lati opposti congruenti
3. ha gli angoli opposti congruenti
4. ha le diagonali che si intersecano nel loro punto medio
5. ha una coppia di lati opposti congruenti e paralleli

Rettangolo

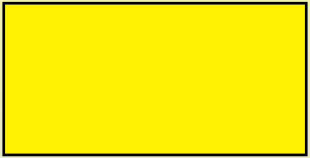
Quadrilatero con tutti gli angoli retti.



Un quadrilatero è un rettangolo se:

Rettangolo

Quadrilatero con tutti gli angoli retti.

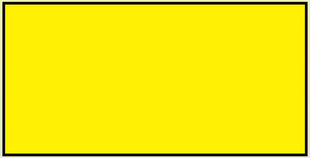


Un quadrilatero è un rettangolo se:

1. ha quattro angoli congruenti

Rettangolo

Quadrilatero con tutti gli angoli retti.

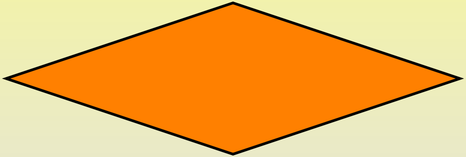


Un quadrilatero è un rettangolo se:

1. ha quattro angoli congruenti
2. è un parallelogramma e ha le diagonali congruenti

Rombo

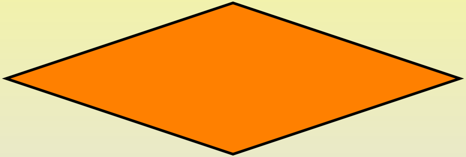
Quadrilatero con tutti i lati congruenti.



Un parallelogramma è un rombo se:

Rombo

Quadrilatero con tutti i lati congruenti.

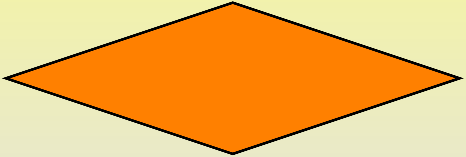


Un parallelogramma è un rombo se:

1. ha due lati consecutivi congruenti

Rombo

Quadrilatero con tutti i lati congruenti.

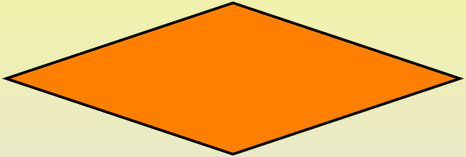


Un parallelogramma è un rombo se:

1. ha due lati consecutivi congruenti
2. ha le diagonali perpendicolari

Rombo

Quadrilatero con tutti i lati congruenti.

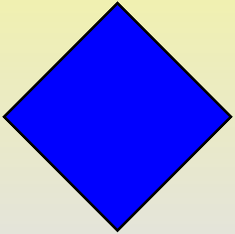


Un parallelogramma è un rombo se:

1. ha due lati consecutivi congruenti
2. ha le diagonali perpendicolari
3. una diagonale è bisettrice di un angolo interno al parallelogramma

Quadrato

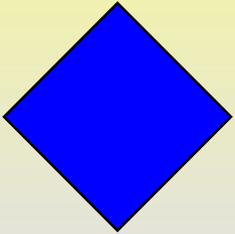
Quadrilatero con tutti i lati congruenti e tutti gli angoli retti.



Un parallelogramma è un quadrato se:

Quadrato

Quadrilatero con tutti i lati congruenti e tutti gli angoli retti.

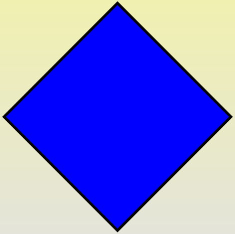


Un parallelogramma è un quadrato se:

1. ha le diagonali congruenti e perpendicolari

Quadrato

Quadrilatero con tutti i lati congruenti e tutti gli angoli retti.



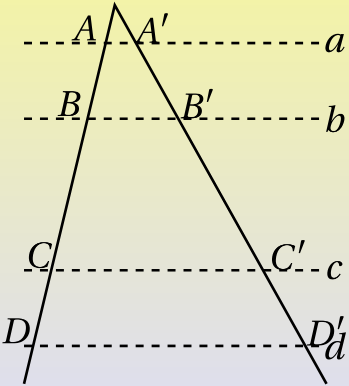
Un parallelogramma è un quadrato se:

1. ha le diagonali congruenti e perpendicolari
2. ha le diagonali congruenti e una è bisettrice di un angolo interno al parallelogramma

Piccolo teorema di Talete

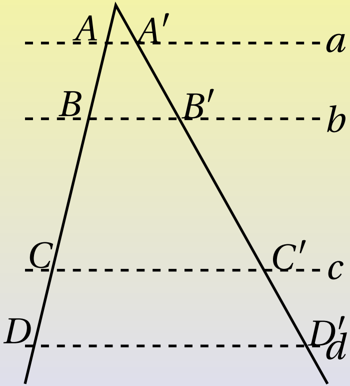
(dimostrazione qui omessa)

Piccolo teorema di Talete



(dimostrazione qui omessa)

Piccolo teorema di Talete



Ipotesi:

$$a \parallel b \parallel c \parallel d$$

$$AB \cong CD$$

Tesi:

$$A'B' \cong C'D'$$

(dimostrazione qui omessa)

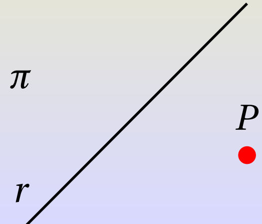
Definizione: trasformazione geometrica

Una trasformazione geometrica è una funzione biunivoca che associa punti del piano ad altri punti dello stesso piano.

Esistono diversi tipi di trasformazioni geometriche, noi, per ora, ci occuperemo delle simmetrie rispetto ad una retta e delle simmetrie rispetto ad un punto.

Definizione: simmetrico di un punto rispetto ad una retta

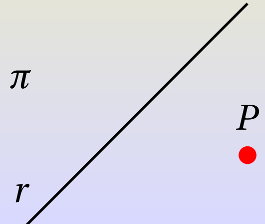
Data una retta r e un punto P nel piano π si dice simmetrico di P nel piano π:



Definizione: simmetrico di un punto rispetto ad una retta

Data una retta r e un punto P nel piano π si dice simmetrico di P nel piano π:

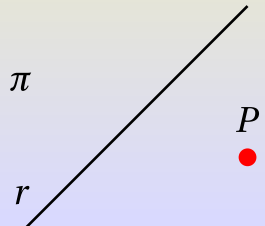
- il punto P' tale che l'asse di PP' sia r, se $P \notin r$



Definizione: simmetrico di un punto rispetto ad una retta

Data una retta r e un punto P nel piano π si dice simmetrico di P nel piano π:

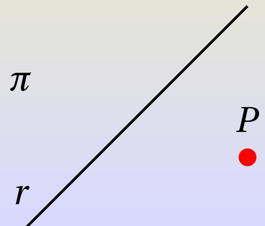
- il punto P' tale che l'asse di PP' sia r, se $P \notin r$
- il punto $P' \equiv P$, se $P \in r$.



Definizione: simmetrico di un punto rispetto ad una retta

Data una retta r e un punto P nel piano π si dice simmetrico di P nel piano π:

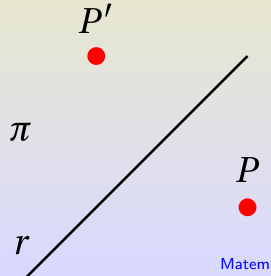
- il punto P' tale che l'asse di PP' sia r, se $P \notin r$
- il punto $P' \equiv P$, se $P \in r$.



Definizione: simmetrico di un punto rispetto ad una retta

Data una retta r e un punto P nel piano π si dice simmetrico di P nel piano π:

- il punto P' tale che l'asse di PP' sia r, se $P \notin r$
- il punto $P' \equiv P$, se $P \in r$.



Definizione: simmetria assiale

Una simmetria assiale rispetto ad una retta r è una trasformazione che associa ad ogni punto P del piano un punto P', simmetrico di P rispetto a r.

Definizione: simmetria assiale

Una simmetria assiale rispetto ad una retta r è una trasformazione che associa ad ogni punto P del piano un punto P', simmetrico di P rispetto a r.

Proprietà delle simmetrie assiali:

Definizione: simmetria assiale

Una simmetria assiale rispetto ad una retta r è una trasformazione che associa ad ogni punto P del piano un punto P', simmetrico di P rispetto a r.

Proprietà delle simmetrie assiali:

- trasformano segmenti in segmenti congruenti

Definizione: simmetria assiale

Una simmetria assiale rispetto ad una retta r è una trasformazione che associa ad ogni punto P del piano un punto P', simmetrico di P rispetto a r.

Proprietà delle simmetrie assiali:

- trasformano segmenti in segmenti congruenti
- trasformano angoli in angoli congruenti

Definizione: simmetria assiale

Una simmetria assiale rispetto ad una retta r è una trasformazione che associa ad ogni punto P del piano un punto P', simmetrico di P rispetto a r.

Proprietà delle simmetrie assiali:

- trasformano segmenti in segmenti congruenti
- trasformano angoli in angoli congruenti
- trasformano rette parallele in rette parallele

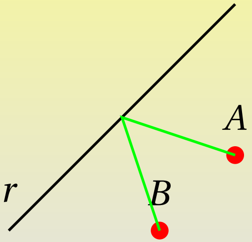
Definizione: simmetria assiale

Una simmetria assiale rispetto ad una retta r è una trasformazione che associa ad ogni punto P del piano un punto P', simmetrico di P rispetto a r.

Proprietà delle simmetrie assiali:

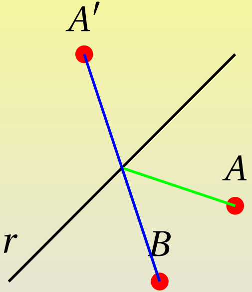
- trasformano segmenti in segmenti congruenti
- trasformano angoli in angoli congruenti
- trasformano rette parallele in rette parallele
- trasformano triangoli in triangoli congruenti

Problema di Erone



Determinare il percorso minimo che si deve compiere per andare da un punto A ad un punto B dovendo toccare una certa retta r esterna ai due punti appartenenti allo stesso semipiano definito da r.

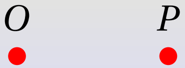
Problema di Erone



Determinare il percorso minimo che si deve compiere per andare da un punto A ad un punto B dovendo toccare una certa retta r esterna ai due punti appartenenti allo stesso semipiano definito da r.

Definizione: simmetrico di un punto rispetto ad un altro

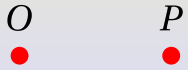
Dato un punto P si dice simmetrico di P rispetto ad O nel piano π:



Definizione: simmetrico di un punto rispetto ad un altro

Dato un punto P si dice simmetrico di P rispetto ad O nel piano π:

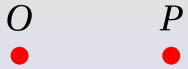
- il punto P' tale che il punto medio di PP' sia O, se $P \not\equiv O$



Definizione: simmetrico di un punto rispetto ad un altro

Dato un punto P si dice simmetrico di P rispetto ad O nel piano π:

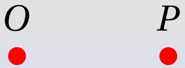
- il punto P' tale che il punto medio di PP' sia O, se $P \not\equiv O$
- il punto $P' \equiv P \equiv O$, se $P \equiv O$.



Definizione: simmetrico di un punto rispetto ad un altro

Dato un punto P si dice simmetrico di P rispetto ad O nel piano π:

- il punto P' tale che il punto medio di PP' sia O, se $P \not\equiv O$
- il punto $P' \equiv P \equiv O$, se $P \equiv O$.



Definizione: simmetrico di un punto rispetto ad un altro

Dato un punto P si dice simmetrico di P rispetto ad O nel piano π:

- il punto P' tale che il punto medio di PP' sia O, se $P \not\equiv O$
- il punto $P' \equiv P \equiv O$, se $P \equiv O$.

Definizione: simmetria centrale

Una simmetria centrale di centro O è una trasformazione che associa ad ogni punto P del piano un punto P', simmetrico di P rispetto a O.

Definizione: simmetria centrale

Una simmetria centrale di centro O è una trasformazione che associa ad ogni punto P del piano un punto P', simmetrico di P rispetto a O.

Proprietà delle simmetrie centrali:

Definizione: simmetria centrale

Una simmetria centrale di centro O è una trasformazione che associa ad ogni punto P del piano un punto P', simmetrico di P rispetto a O.

Proprietà delle simmetrie centrali:

- trasformano segmenti in segmenti congruenti

Definizione: simmetria centrale

Una simmetria centrale di centro O è una trasformazione che associa ad ogni punto P del piano un punto P', simmetrico di P rispetto a O.

Proprietà delle simmetrie centrali:

- trasformano segmenti in segmenti congruenti
- trasformano angoli in angoli congruenti

Definizione: simmetria centrale

Una simmetria centrale di centro O è una trasformazione che associa ad ogni punto P del piano un punto P', simmetrico di P rispetto a O.

Proprietà delle simmetrie centrali:

- trasformano segmenti in segmenti congruenti
- trasformano angoli in angoli congruenti
- trasformano rette parallele in rette parallele

Definizione: simmetria centrale

Una simmetria centrale di centro O è una trasformazione che associa ad ogni punto P del piano un punto P', simmetrico di P rispetto a O.

Proprietà delle simmetrie centrali:

- trasformano segmenti in segmenti congruenti
- trasformano angoli in angoli congruenti
- trasformano rette parallele in rette parallele
- trasformano triangoli in triangoli congruenti

Indichiamo un dato di una indagine statistica con una lettera minuscola e un pedice:

$$x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N$$

a dati diversi corrispondono pedici diversi, a dati uguali corrispondono pedici uguali, la statistica comprende N dati in totale.

Un medesimo dato può presentarsi può volte, in questo caso ad esso associamo una frequenza, cioè il numero di volte che tale dato si è presentato:

X	f
x_1	f_1
x_2	f_2
...	...
x_i	f_i
...	...
x_n	f_n

La scrittura significa che il dato x_i si è presentato un numero f_i di volte.

La totalità dei dati di una statistica è pari alla somma delle frequenze:

$$N = f_1 + f_2 + \cdots + f_i + \cdots + f_n$$

Sono frequenze relative le f_R:

X	f	f_R
x_1	f_1	$\frac{f_1}{N}$
x_2	f_2	$\frac{f_2}{N}$
...	...	...
x_i	f_i	$\frac{f_i}{N}$
...	...	...
x_n	f_n	$\frac{f_n}{N}$

Le frequenze cumulate si ottengono sommando le frequenze assolute come mostrato in tabella:

X	f	f_C
x_1	f_1	f_1
x_2	f_2	$f_1 + f_2$
...	...	...
x_i	f_i	$f_1 + f_2 + \cdots + f_i$
...	...	...
x_n	f_n	N

Le frequenze relative cumulate si ottengono sommando le frequenze relative come mostrato in tabella:

X	f	f_{RC}
x_1	f_1	$\frac{f_1}{N}$
x_2	f_2	$\frac{f_1+f_2}{N}$
...	...	...
x_i	f_i	$\frac{f_1+f_2+\cdots+f_i}{N}$
...	...	...
x_n	f_n	1

La media aritmetica dei dati di una statistica è data dalla relazione:

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_i + \cdots + x_N}{N}$$

oppure, utilizzando le frequenze:

$$\mu = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_i x_i + \cdots + f_n x_n}{N}$$

oppure utilizzando le frequenze relative:

$$\mu = f_{R1} x_1 + f_{R2} x_2 + \cdots + f_{Ri} x_i + \cdots + f_{Rn} x_n$$

La varianza dei dati di una statistica è data dalla relazione:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \cdots + (x_i - \mu)^2 + \cdots + (x_N - \mu)^2}{N}$$

si può dimostrare che lo stesso risultato si ottiene anche dalla:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_i^2 + \cdots + x_N^2}{N} - \mu^2$$

oppure in termini di frequenze assolute:

$$\sigma^2 = \frac{f_1 x_1^2 + f_2 x_2^2 + \cdots + f_i x_i^2 + \cdots + f_n x_n^2}{N} - \mu^2$$

La deviazione standard o scarto quadratico medio è dato dalla:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_i-\mu)^2+\cdots+(x_N-\mu)^2}{N}}$$

si può dimostrare che lo stesso risultato si ottiene anche dalla:

$$\sigma = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_i^2+\cdots+x_N^2}{N}-\mu^2}$$

oppure in termini di frequenze assolute:

$$\sigma = \sqrt{\frac{f_1x_1^2+f_2x_2^2+\cdots+f_ix_i^2+\cdots+f_nx_n^2}{N}-\mu^2}$$

Il coefficiente di variazione è dato dalla relazione:

$$C_V = \frac{\sigma}{\mu}$$