Matematica

Appunti di Matematica 2

Michele prof. Perini

IISS Copernico Pasoli - Liceo Scientifico

A.S. 2024-2025

3. Vettori 2D e piano cartesiano
   - Definizione
   - Modulo
   - Scalare per vettore
   - Somma
   - Prodotto scalare
   - Rette
   - Determinanti
   - Distanza punto-retta
   - Fasci di rette

4. $\mathbb{A}$ Algebrici
   - Radicali
     - Non razionalità di alcune radici
     - Equazioni polinomiali grado n
     - Proprietà dei radicali

- Polinomiali di grado 2
  - Identità di secondo grado
  - Sistemi simmetrici
- Numeri algebrici

5. $\mathbb{R}$ Numeri reali
6. $y = ax^2 + bx + c$
7. Circonferenza
   - e triangoli
8. Aree e teorema di Pitagora
9. Triangoli simili
   - Teorema di Talete
   - Criteri di similitudine
   - Teoremi di Euclide
10. Omotetie
11. Probabilità

- Definizione classica
- Eventi e spazi campionari
- Definizione assiomatica

Sistemi lineari 2 per 2

I sistemi lineari 2×2:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Le due equazioni nelle incognite x e y devono essere verificate contemporaneamente. In generale per risolvere i sistemi lineari si può utilizzare la proprietà transitiva delle relazioni di equivalenza insieme ai principi di equivalenza.

Esempio: metodo di sostituzione

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x \\ x + 2(3 - 2x) = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 - 2x \\ x = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$$

questo utilizzo della proprietà transitiva e dei principi di equivalenza prevede di ricavare una incognita da una equazione per poi sostituirla nell'altra.

Sistemi lineari 2 per 2

Esempio: metodo del confronto

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x \\ y = \frac{9}{2} - \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 - 2x \\ 3 - 2x = \frac{9}{2} - \frac{x}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$$

questo utilizzo della proprietà transitiva e dei principi di equivalenza prevede di ricavare una incognita da entrambe le equazioni.

Sistemi lineari 2 per 2

Esempio: metodo di riduzione

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+2y=9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x+2y=6 \\ x+2y=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y=9 \\ 3x=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases}$$

questo utilizzo della proprietà transitiva e dei principi di equivalenza prevede di sostituire ad una delle equazioni quanto ottenuto dalla somma o dalla sottrazione di ambo i membri ordinati delle equazioni di partenza.

Sistemi lineari 2 per 2

In generale (1):

Se $b \neq 0 \wedge e \neq 0$:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \rightarrow \begin{cases} eax + eby = ec \\ bdx + bey = bf \end{cases}$$

$$\begin{cases} eax + eby = ec \\ (ae - bd)x = ce - bf \end{cases}$$

se $ae - bd \neq 0 \rightarrow \begin{cases} eax + eby = ec \\ x = \frac{ce-bf}{ae-bd} \end{cases}$

In generale (2):

Se $a \neq 0 \wedge d \neq 0$:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dax + dby = dc \\ adx + aey = af \end{cases}$$

$$\begin{cases} dax + dby = dc \\ (ae - bd)y = af - cd \end{cases}$$

se $ae - bd \neq 0 \rightarrow \begin{cases} dax + dby = dc \\ y = \frac{af-cd}{ae-bd} \end{cases}$

Sistemi lineari 2 per 2

In generale (3), sistema con una soluzione:

Se $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge d \neq 0 \wedge e \neq 0 \wedge ae - bd \neq 0$:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{ce-bf}{ae-bd} \\ y = \frac{af-cd}{ae-bd} \end{cases}$$

se $ae - bd \neq 0$ e almeno tre su quattro tra a, b, e, d sono non nulli il sistema ammette un'unica coppia (x, y) come soluzione.

Sistemi lineari 2 per 2

In generale (4), sistema senza soluzioni:

Se $b \neq 0 \wedge e \neq 0 \wedge ae - bd = 0 \wedge ce - bf \neq 0$ oppure se $a \neq 0 \wedge d \neq 0 \wedge ae - bd = 0 \wedge af - cd \neq 0$:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \rightarrow \nexists x, y$$

In generale (5), sistema con infinite soluzioni:

Se $b \neq 0 \wedge e \neq 0 \wedge ae - bd = 0 \wedge ce - bf = 0 \wedge$
$\wedge a \neq 0 \wedge d \neq 0 \wedge af - cd = 0$:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

in questi casi il sistema ammette infinite soluzioni che non esplicitiamo nella scrittura.

Sistemi lineari 2 per 2

In generale (6), sintesi:

Sintetizzando i casi precedentemente trattati e quelli (banali) rimasti in sospeso si ha che:

- se $ae-bd \neq 0$ allora il sistema ammette una sola soluzione $\begin{cases} x = \frac{ce-bf}{ae-bd} \\ y = \frac{af-cd}{ae-bd} \end{cases}$
- se $ae-bd = 0 \wedge (ce-bf \neq 0 \vee af-cd \neq 0)$ oppure $a=b=d=e=0 \wedge (c \neq 0 \vee f \neq 0)$ allora $\nexists x, y$
- se $ae-bd = 0 \wedge ce-bf = 0 \wedge af-cd = 0$ e almeno uno tra a, b, d, e è non nullo oppure se $a=b=c=d=e=f=0$ allora il sistema ammette infinite soluzioni

Sistemi lineari 2×2 e matrici:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

Tramite le matrici (tabelle ordinate per riga e per colonna) e i vettori (colonne di elementi ordinati) è possibile riscrivere i sistemi lineari (per ora accenniamo solamente a questo fatto).

Definizione: determinante di una matrice 2×2

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

Determinanti legati al sistema

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ce - bf$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = af - cd$$

Teorema di Cramer per i sistemi 2×2

Il sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ con almeno uno tra a, b, d, e non nullo ammette come soluzione:

- $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D} \end{cases}$ se $D \neq 0$
- infinite soluzioni scrivibili tramite parametri se $D = D_x = D_y = 0)$
- $\nexists (x, y)$ se $D = 0 \wedge (D_x \neq 0 \vee D_y \neq 0)$

Esempio $D \neq 0$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \; D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Esempio $D = 0$ nessuna soluzione

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -2x - y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 0,\ D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -2x - y = 1 \end{cases} \rightarrow \nexists x, y$$

Esempio $D = 0$ infinite soluzioni

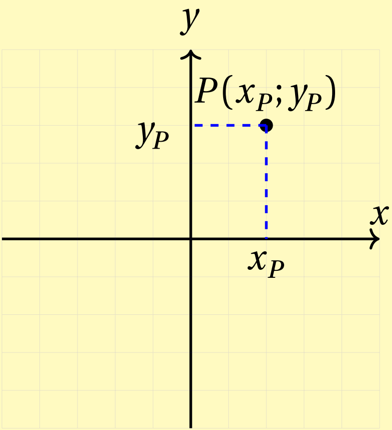
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -2x - y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 0,\ D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

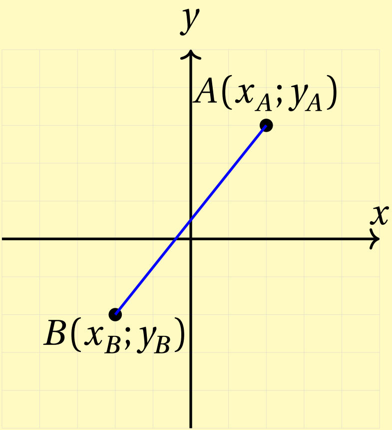
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -2x - y = -1 \end{cases} \rightarrow 2x+y = 1 \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \forall t \in \mathbb{R}$$

Punti sul piano cartesiano



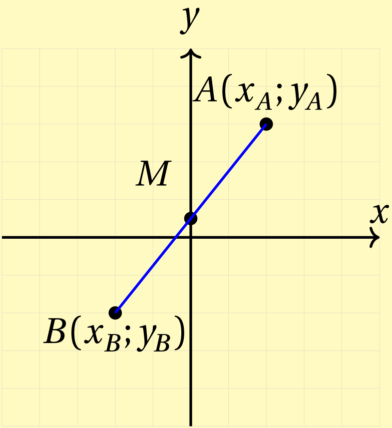
Un punto P sul piano cartesiano è individuato da una coppia di coordinate $P(x_P;y_P)$.

Distanza tra due punti



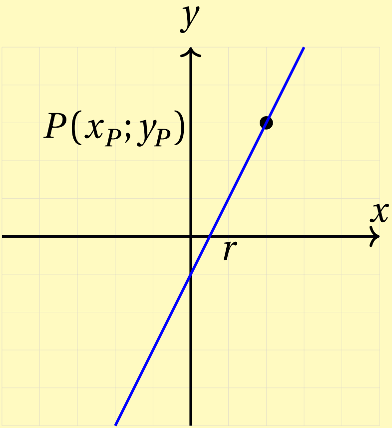
$$AB =$$
$$= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Punto medio



$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

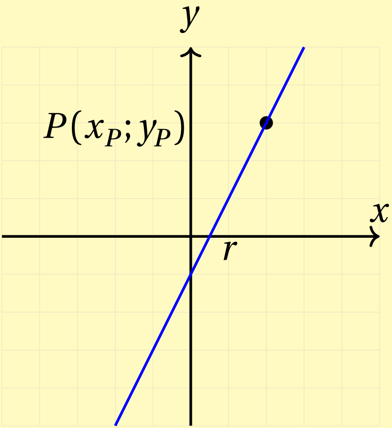
Retta, equazione implicita



$$r : ax + by + c = 0$$

$$P \in r \leftrightarrow ax_P + by_P + c = 0$$

Retta, equazione esplicita



$$r : y = mx + q$$

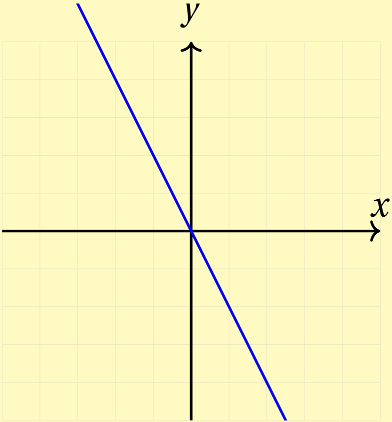
$$P \in r \leftrightarrow y_P = mx_P + q$$

oppure

$$r : x = k$$

$$P \in r \leftrightarrow x_P = k$$

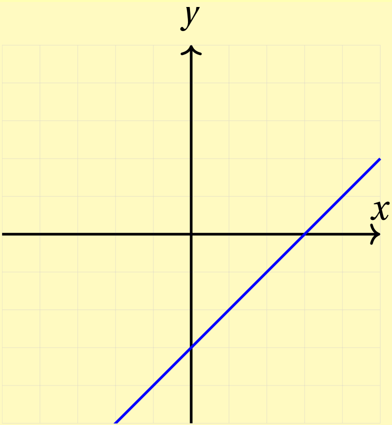
Retta, m



$$r : y = mx + q$$

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Retta, q



$$r : y = mx + q$$

$$P(0, q)$$

Rette parallele nel piano

$$a \parallel b \leftrightarrow (a \cap b = \emptyset \vee a = b)$$

$$a \cap b \rightarrow \begin{cases} y = m_a x + q_a \\ y = m_b x + q_b \end{cases}$$

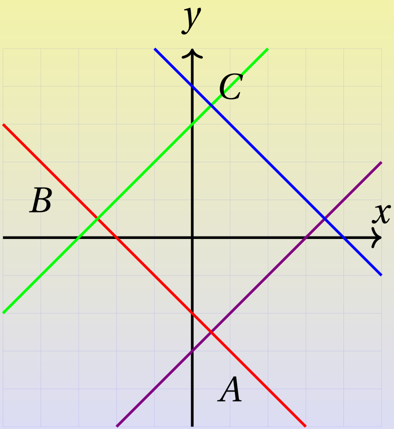
$$\text{se } (m_a = m_b \wedge q_a = q_b) \rightarrow a = b \rightarrow a \parallel b$$

$$\text{se } (m_a = m_b \wedge q_a \neq q_b) \rightarrow a \cap b = \emptyset \rightarrow a \parallel b$$

Condizione di parallelismo

$$m_a = m_b$$

Rette perpendicolari (1)



$$a : y = m_a x + q_a$$

$$b : y = m_b x + q_b$$

$$c \parallel a : y = m_a x + q_c$$

$$d \parallel b : y = m_b x + q_d$$

Rette perpendicolari (2)

$$A \in a \cap d \rightarrow \left(-\frac{q_a - q_d}{m_a - m_b}; \frac{m_a\, q_d - m_b\, q_a}{m_a - m_b}\right)$$

$$B \in a \cap b \rightarrow \left(-\frac{q_a - q_b}{m_a - m_b}; \frac{m_a\, q_b - m_b\, q_a}{m_a - m_b}\right)$$

$$C \in c \cap b \rightarrow \left(\frac{q_b - q_c}{m_a - m_b}; \frac{m_a\, q_b - m_b\, q_c}{m_a - m_b}\right)$$

Rette perpendicolari (3)

$$AB^2 = \frac{(q_b - q_d)^2 \left({m_a}^2 + 1\right)}{(m_a - m_b)^2}$$

$$BC^2 = \frac{(q_a - q_c)^2 \left({m_b}^2 + 1\right)}{(m_a - m_b)^2}$$

$$AC^2 = \frac{(q_a - q_d + q_b - q_c)^2}{(m_a - m_b)^2} + \frac{(m_a\, q_b - m_a\, q_d + m_b\, q_a - m_b\, q_c)^2}{(m_a - m_b)^2}$$

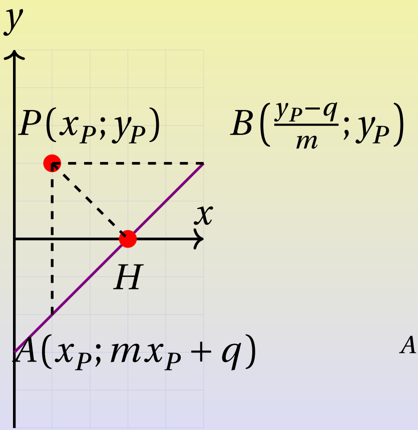
Rette perpendicolari (4)

$$a \perp b \leftrightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Condizione di perpendicolarità

$$m_a m_b = -1$$

Distanza punto-retta (1)



$$r : y = mx + q$$

$$PA = \left|y_P - mx_p - q\right|$$

$$PB = \left|\frac{y_P - mx_p - q}{m}\right|$$

$$AB = \sqrt{\left(\frac{y_P - mx_p - q}{m}\right)^2 + \left(y_P - mx_p - q\right)^2}$$

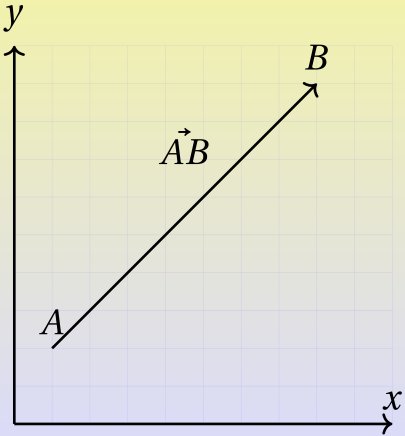
Distanza punto-retta (2)

$$PH = \frac{2PA \cdot PB}{AB} = \frac{\left| y_P - m x_p - q \right|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

distanza punto-retta

$$d = \frac{\left| y_P - m x_p - q \right|}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{\left| a x_p + b y_P + c \right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Un vettore può essere definito come una ennupla ordinata sulla quale si definiscono le operazioni di prodotto scalare-vettore e di somma.

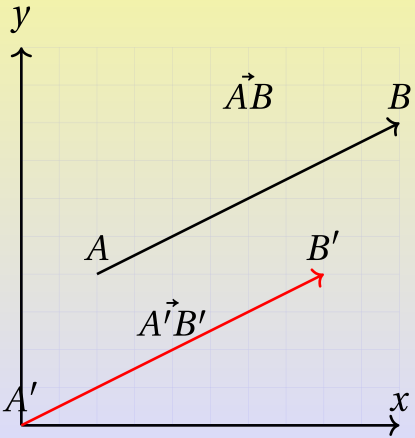


$$A\left(x_A, y_A\right)$$

$$B\left(x_B, y_B\right)$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Due vettori sono equivalenti se hanno le medesime rispettive componenti. Due vettori equivalenti hanno lo stesso modulo, direzione e verso.



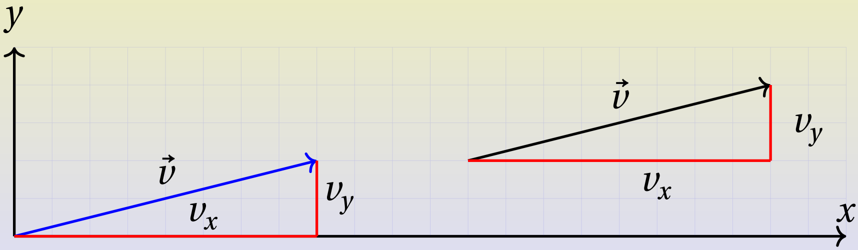
$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} =$$

$$= \vec{A'B'} = \begin{pmatrix} x_{B'} - x_{A'} \\ y_{B'} - y_{A'} \end{pmatrix}$$

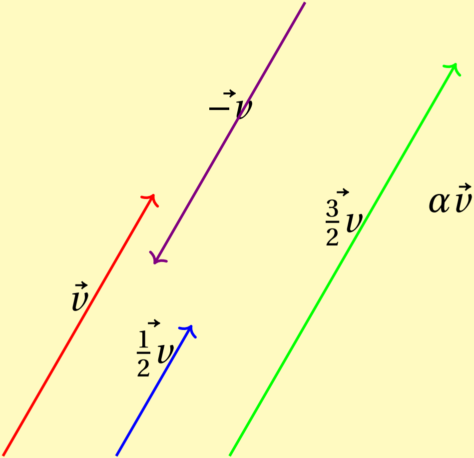
Modulo di un vettore

Dato il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ il suo modulo è

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$



Prodotto scalare per vettore

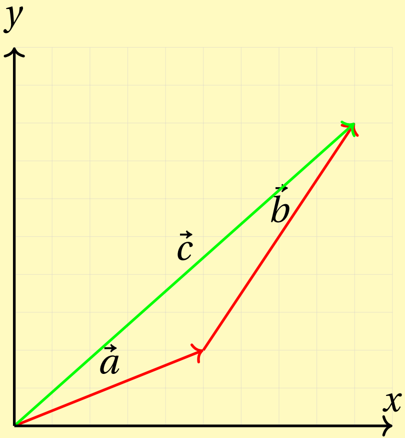


$$\alpha\vec{v} = \alpha\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_x \\ \alpha v_y \end{pmatrix}$$

$$|\alpha\vec{v}| = |\alpha|\,|\vec{v}|$$

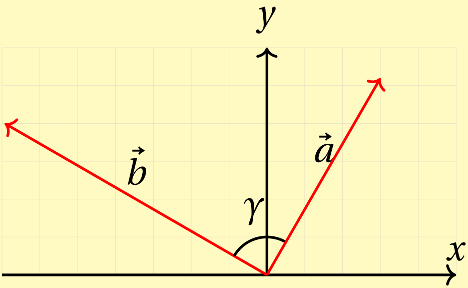
$$\vec{v} \parallel \alpha\vec{v}$$

Somma tra vettori



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

Prodotto scalare: definizione



$$\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} =$$

$$= a_x b_x + a_y b_y$$

Prodotto scalare: proprietà

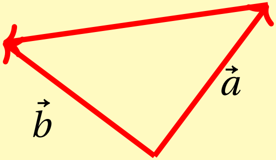
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot \left(k\vec{b}\right) = k\vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = a^2$

Le proprietà possono essere facilmente dimostrate a partire dalla definizione, dimostriamo l'ultima:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = a_x^2 + a_y^2 = |\vec{a}|^2$$

Prodotto scalare e perpendicolarità

$$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$$



Per il teorema di Pitagora si ha:

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = \left(\vec{b} - \vec{a}\right)^2$$

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

Retta parallela al vettore $\vec{v}$ e passante per il punto $P(x_P, y_P)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\vec{v} + \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$$

Due rette, nel piano, definite rispettivamente dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono parallele se e solo se $\vec{v} \parallel \vec{w}$, sono perpendicolari se e solo se $\vec{v} \perp \vec{w}$.

Retta passante per il punto $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$$

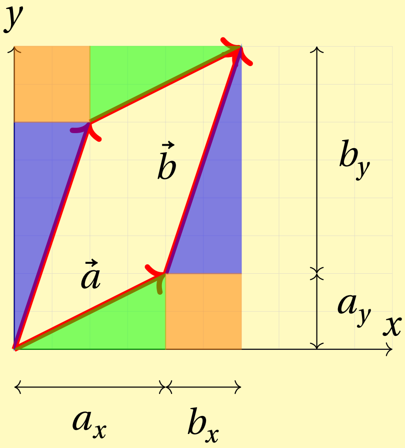
Equazione cartesiana retta passante per $P(x_P, y_P)$ e perpendicolare al vettore $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \rightarrow a(x - x_P) + b(y - y_P) = 0$$

Ricordiamo la definizione di determinante di una matrice 2×2

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Determinanti e aree dei parallelogrammi



$$S = |(a_x + b_x)\left(a_y + b_y\right) +$$

$$-2b_x a_y - a_x a_y - b_x b_y| =$$

$$= \left|a_x b_y - a_y b_x\right| =$$

$$= \left|det\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix}\right|$$

Determinanti e vettori paralleli:

$$\vec{v} \parallel \vec{w} \rightarrow \vec{v} = k\vec{w}$$

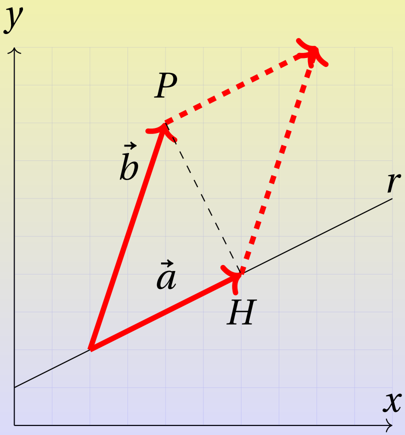
$$det\begin{pmatrix} \vec{v} & \vec{w} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} v_x & w_x \\ v_y & w_y \end{pmatrix} =$$

$$= det\begin{pmatrix} kw_x & w_x \\ kw_y & w_y \end{pmatrix} = kw_xw_y - kw_xw_y = 0$$

In conclusione:

$$\vec{v} \parallel \vec{w} \leftrightarrow det\begin{pmatrix} \vec{v} & \vec{w} \end{pmatrix} = 0$$

Distanza tra retta r e punto P



$$PH = \frac{\left| det \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} \right|}{|\vec{a}|}$$

I fasci di rette sono famiglie di rette ognuna delle quali si ottiene per un certo $k \in \mathbb{R}$.

- fascio di rette passanti per $P(x_P, y_P)$: $y - y_P = k(x - x_P)$
- fascio di rette parallele $y = mx + k$
- fascio generato da due rette generatrici: $(ax + by + c) + k(a'x + b'y + c') = 0$

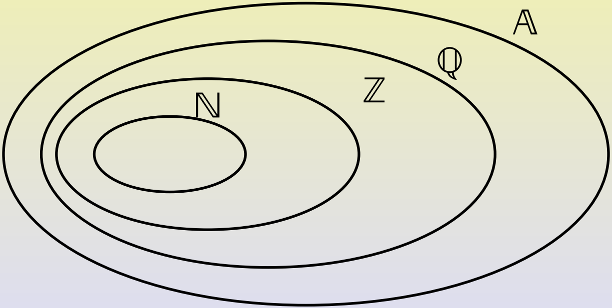
L'insieme dei numeri algebrici ($\mathbb{A}$) è una estensione dell'insieme dei numeri razionali. Gli algebrici sono soluzioni di particolari equazioni, per ora ci occuperemo di alcune di esse.

$$x^{2n} = k, n \in \mathbb{N}_0, k \geq 0 \in \mathbb{Q}$$

$$x^{2n+1} = h, n \in \mathbb{N}, h \in \mathbb{Q}$$

Queste equazioni non sempre hanno soluzioni per $x \in \mathbb{Q}$, questo ci porta ad estendere l'insieme dei razionali e definire gli algebrici.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$$



I razionali non bastano (1)

Una equazione come $x^2 = n$ con $n \in \mathbb{N}$ ammette soluzioni razionali solamente se n è un quadrato perfetto. Per dimostrarlo è sufficiente usare il teorema fondamentale dell'aritmetica. Ammettendo che $x = \frac{a}{b}$ con $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}_0$ sia un razionale soluzione dell'equazione si ottiene:

$$\frac{a^2}{b^2} = n \rightarrow a^2 = nb^2$$

I razionali non bastano (2)

$$a^2 = nb^2$$

utilizzando il teorema fondamentale dell'aritmetica si può riscrive l'equazione precedente in termini di fattori primi di n, a, b:

$$\left(P_0^{a_0} \cdot P_1^{a_1} \cdots P_i^{a_i} \cdots P_m^{a_m}\right)^2 = \left(P_0^{n_0} \cdot P_1^{n_1} \cdots P_i^{n_i} \cdots P_m^{n_m}\right)\left(P_0^{b_0} \cdot P_1^{b_1} \cdots P_i^{b_i} \cdots P_m^{b_m}\right)^2$$

$$P_0^{2a_0} \cdot P_1^{2a_1} \cdots P_i^{2a_i} \cdots P_m^{2a_m} = P_0^{n_0} \cdot P_1^{n_1} \cdots P_i^{n_i} \cdots P_m^{n_m} \left(P_0^{2b_0} \cdot P_1^{2b_1} \cdots P_i^{2b_i} \cdots P_m^{2b_m}\right)$$

$$P_0^{2a_0} \cdot P_1^{2a_1} \cdots P_i^{2a_i} \cdots P_m^{2a_m} = P_0^{n_0+2b_0} \cdot P_1^{n_1+2b_1} \cdots P_i^{n_i+2b_i} \cdots P_m^{n_m+2b_m}$$

I razionali non bastano (3)

$$P_0^{2a_0} \cdot P_1^{2a_1} \cdots P_i^{2a_i} \cdots P_m^{2a_m} = P_0^{n_0+2b_0} \cdot P_1^{n_1+2b_1} \cdots P_i^{n_i+2b_i} \cdots P_m^{n_m+2b_m}$$

i membri di sinistra e di destra dell'equazione rappresentano i fattori primi di uno stesso naturale, per l'unicità della scomposizione in fattori primi affinché l'uguaglianza sia vera deve essere:

$$2a_i = n_i + 2b_i, \forall i \in \mathbb{N}$$

questo accade solamente se tutti gli n_i sono pari e quindi solamente se n è un quadrato perfetto.

Le radici come soluzioni di equazioni polinomiali

$$x^{2n} = k \rightarrow x = \pm \sqrt[2n]{k}, n \in \mathbb{N}_0, k \geq 0$$

in modo arbitrario ci accordiamo sul fatto che $\sqrt[2n]{k} \geq 0$.

$$x^{2n+1} = h \rightarrow x = \sqrt[2n+1]{h}, n \in \mathbb{N}$$

come mostrato in precedenza le soluzioni delle equazioni proposte non sono necessariamente razionali, ciò impone la definizione e l'utilizzo di una nuova simbologia come quella delle radici.

Le proprietà radicali

Quando esistono i radicali godono delle seguenti proprietà:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Radicali quadratici

$$\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Definizione delle potenze ad esponente razionale

Se $a > 0, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{-1} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Radicali e potenze razionali (1)

Se $a > 0, b > 0$ e gli esponenti danno significato ai simboli:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \leftrightarrow a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}}$$

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \leftrightarrow a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \leftrightarrow \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \leftrightarrow \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} \leftrightarrow \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}}$$

Radicali e potenze razionali (2)

ATTENZIONE ALLE CONDIZIONI DI ESISTENZA:

- $\sqrt[2n]{a}$ esiste se $a \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}_0$ ed è non negativo per definizione
- $\sqrt[2n+1]{a}$ esiste se $n \in \mathbb{N}$
- a^q esiste se $a > 0$ e $q \in \mathbb{Q}$

Una equazione polinomiale di secondo grado è una equazione del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

Per risolvere una equazione di questo tipo possiamo utilizzare l'identità:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0$$

Per semplicità si definisce: $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$

- se $\Delta < 0$ allora $\nexists x \in \mathbb{R}$
- se $\Delta = 0$ allora $x = -\frac{b}{2a}$
- se $\Delta > 0$ allora $x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ quindi $x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

Alcune identità sulle equazioni di secondo grado

Se $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ e $a \neq 0$:

- $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$
- $ax^2 + bx + c = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2\right]$

Sistemi simmetrici

$$\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono date dalle soluzioni dell'equazione: $z^2-sz+p=0$.

- se $s^2-4p<0 \rightarrow \nexists z \rightarrow \nexists x, y$
- se $s^2-4p=0 \rightarrow z=\frac{s}{2} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{s}{2} \\ y=\frac{s}{2} \end{cases}$
- se $s^2-4p>0 \rightarrow z=\frac{s\pm\sqrt{s^2-4p}}{2} \rightarrow$
  $\begin{cases} x=\frac{s+\sqrt{s^2-4p}}{2} \\ y=\frac{s-\sqrt{s^2-4p}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{s-\sqrt{s^2-4p}}{2} \\ y=\frac{s+\sqrt{s^2-4p}}{2} \end{cases}$

Equazioni polinomiali di grado n

Una equazione polinomiale di grado n è una equazione del tipo:

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0, c_n \neq 0$$

Delle equazioni polinomiali di grado 1, 2, 3 e 4 sono note le equazioni risolutive. Dal grado 5 in poi non sono risolvibili in termini generali (conseguenza teoria dei gruppi di Galois).

Le soluzioni delle polinomiali di grado 3 e 4?

Una soluzione di una equazione di terzo grado $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ è

$$x = \frac{1}{6}\frac{\sqrt[3]{12\sqrt{3}\sqrt{27\,a^2d^2-18\,abcd+4\,ac^3+4\,b^3d-b^2c^2}\,a-108\,da^2+36\,cba-8\,b^3}}{a} - \frac{2}{3}\frac{3\,ac-b^2}{a\sqrt[3]{12\sqrt{3}\sqrt{27\,a^2d^2-18\,abcd+4\,ac^3+4\,b^3d-b^2c^2}\,a-108\,da^2+36\,cba-8\,b^3}} - \frac{b}{3a}$$

Semplice? ☺

Algebrici

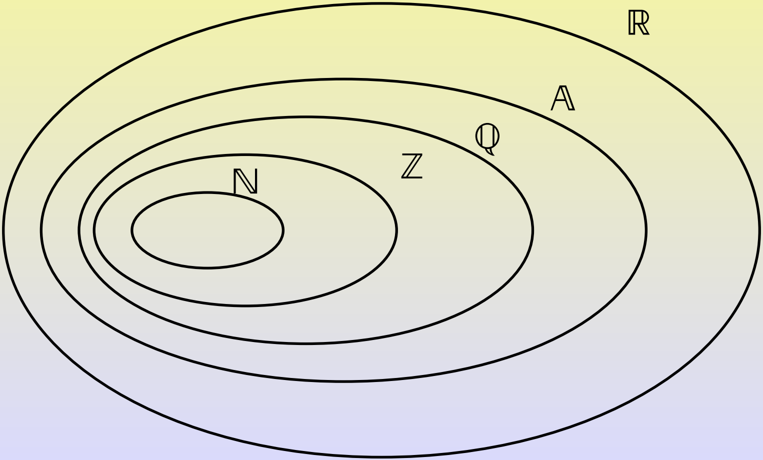
Un algebrico è un numero che è soluzione di una equazione polinomiale

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0, c_n \neq 0$$

con tutti i coefficienti $c_i \in \mathbb{Z}$. Si può dimostrare che $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = \left|\mathbb{Q}\right| = |\mathbb{A}| = \aleph_0$.

$\mathbb{R}$ Numeri reali

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{R}$$



$\mathbb{R}$ Numeri reali

Oltre agli algebrici ci sono anche altri numeri che non sono soluzioni di equazioni polinomiali a coefficienti interi ma si possono scrivere utilizzando la notazione posizionale.

L'insieme di tutti i numeri che si possono scrivere in notazione posizionale (senza limiti al numero di cifre) si chiama insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

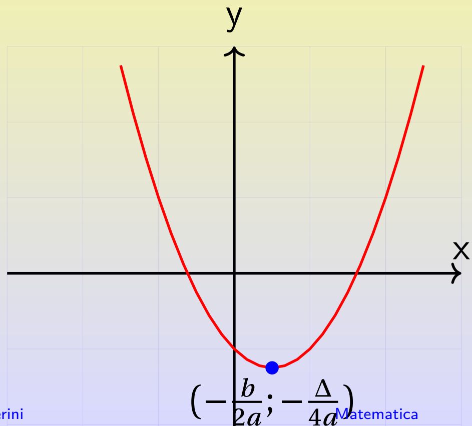
I numeri che appartengono all'insieme $\mathbb{R} - \mathbb{A}$ si chiamano trascendenti (sono ad esempio trascendenti: $\pi, e, \dots$).

I numeri che appartengono all'insieme $\mathbb{A} - \mathbb{Q}$ sono radicali (sono ad esempio radicali: $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt[3]{6}}, \dots$). I numeri che appartengono all'insieme $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ si dicono irrazionali.

$y = ax^2 + bx + c$

$$y = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

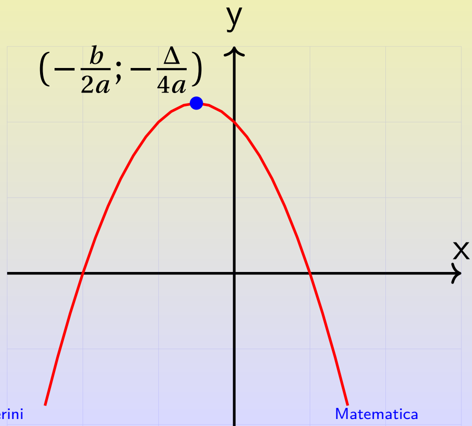
se $a > 0$:



$y = ax^2 + bx + c$

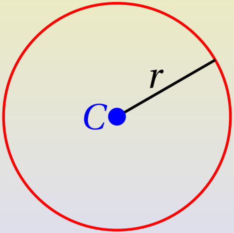
$$y = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

se $a < 0$:



Definizione: circonferenza

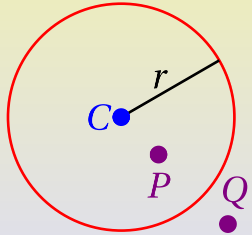
Una circonferenza è l'insieme dei punti del piano che hanno la medesima distanza, detta raggio (r), da un punto detto centro, C.



Circonferenza

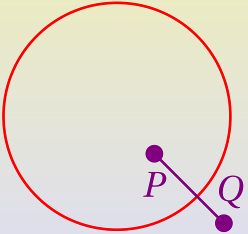
Definizione: punti interni ed esterni

Un punto P è interno alla circonferenza se $PC < r$, un punto Q è esterno alla circonferenza se $QC > r$.



Assioma

Se P è un punto interno ad una circonferenza e Q è un punto esterno, il segmento PQ interseca la circonferenza in un solo punto.



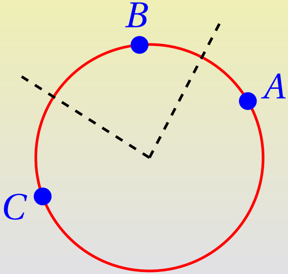
Circonferenza

Definizione: cerchio

Il cerchio è l'insieme dei punti di una circonferenza e dei punti interni ad essa.

Teorema

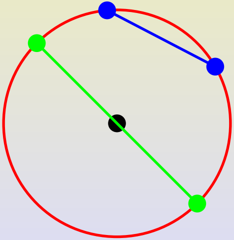
Per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza.



Il centro della circonferenza è l'intersezione degli assi di AB e BC.

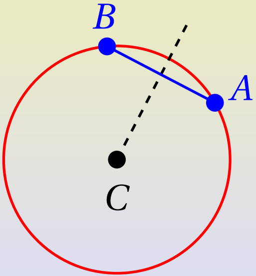
Definizione: corda

Una corda è un segmento che ha per estremi due punti apparteneti ad una circonferenza. Se una corda passa per il centro di una circonferenza prende il nome di diametro.



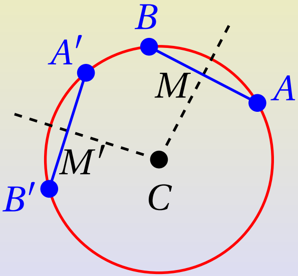
Teorema

In una circonferenza l'asse di una corda passa per il centro e la perpendicolare alla corda passante per il centro è l'asse della corda.



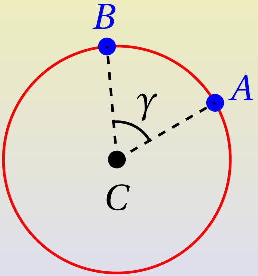
Teorema

Due corde di una stessa circonferenza hanno la medesima lunghezza se e solo se hanno la stessa distanza dal centro. ($AB = A'B' \leftrightarrow MC = M'C$)



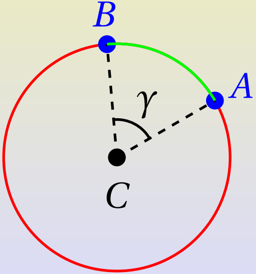
Definizione: angolo al centro

Un angolo al centro (γ) è un angolo che ha vertice nel centro di una circonferenza.



Definizione: arco

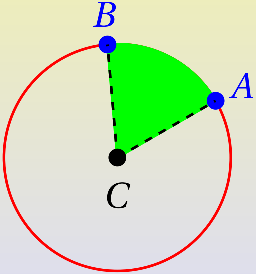
Un arco è una parte di circonferenza compresa tra due punti della circonferenza stessa. Si indica l'arco con il simbolo $\widehat{AB}$. Se non indicato altrimenti si fa riferimento al minore degli archi definiti dai punti.



Circonferenza

Definizione: settore circolare

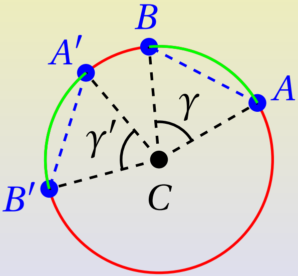
Un settore circolare è la parte di cerchio compresa tra il centro e un arco.



Circonferenza

Teorema

In una circonferenza
$AB = A'B' \leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'} \leftrightarrow \gamma = \gamma'$

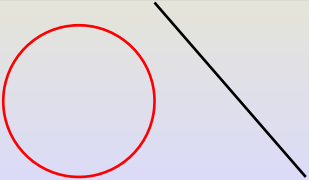


Circonferenza

Retta esterna ad una circonferenza

Una retta è esterna ad una circonferenza se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

- la retta non interseca la circonferenza (definizione)
- se tutti i punti appartenenti alla retta sono esterni alla circonferenza
- se la distanza tra retta e centro della circonferenza è maggiore del raggio

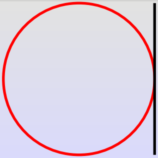


Circonferenza

Retta tangente ad una circonferenza

Una retta è tangente ad una circonferenza se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

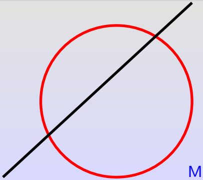
- la retta interseca la circonferenza in un solo punto (definizione)
- se tutti i punti appartenenti alla retta sono esterni alla circonferenza tranne uno
- se la distanza tra retta e centro della circonferenza è uguale raggio



Retta secante ad una circonferenza

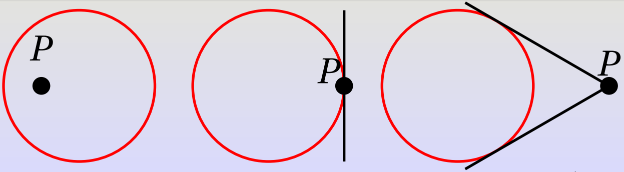
Una retta è secante ad una circonferenza se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

- la retta interseca la circonferenza in due punti distinti (definizione)
- se almeno due punti distinti della retta sono interni alla circonferenza
- se la distanza tra retta e centro della circonferenza è minore del raggio



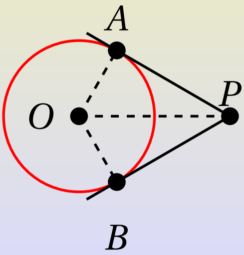
Tangenti ad un circonferenza $\mathbb{C}$ per un punto P

- se P è interno $\mathbb{C}$ non ci sono tangenti a $\mathbb{C}$ passanti per P
- se P appartiene a $\mathbb{C}$ allora la tangente a $\mathbb{C}$ passante per P è unica
- se P è esterno alla circonferenza allora le tangenti a $\mathbb{C}$ passanti per P sono due



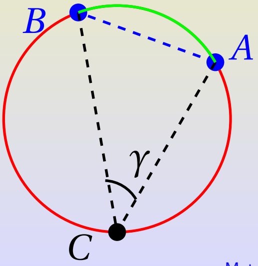
Teorema: segmenti di tangenti ad una circonferenza

Date le tangenti ad una circonferenza di centro O passanti per un punto P esterno alla stessa e detti A e B i punti di tangenza si ha che $\widehat{APO} = \widehat{BPO}$ e $AP = BP$.



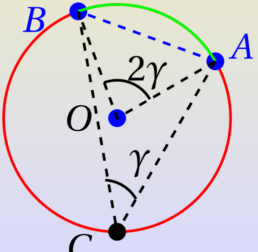
Definizione: angolo alla circonferenza

$\widehat{ACB} = \gamma$ è un angolo alla circonferenza se è un angolo individuato da tre punti su una circonferenza. γ è un angolo alla circonferenza che insiste sulla corda AB o sull'arco $\overset{\frown}{AB}$. Se non specificato altrimenti si considerano i $\gamma \leq \frac{\pi}{2}$.



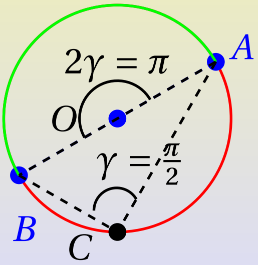
Teorema: angoli alla circonferenza e angolo al centro

Dati un arco $\widehat{AB}$ o una corda AB di una circonferenza di centro O per ogni C sulla circonferenza non appartenete ad $\widehat{AB}$ si ha che $\widehat{AOB} = 2\gamma$ e $\widehat{ACB} = \gamma$.



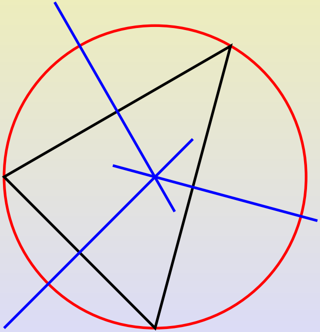
Teorema: triangoli rettangoli in semicirconferenza

Un triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo.



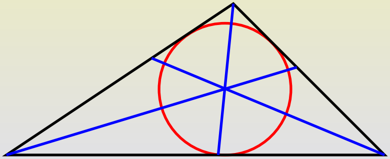
Circocentro

É il centro della circonferenza circoscritta al triangolo. Il circocentro è l'intersezione degli assi del triangolo.



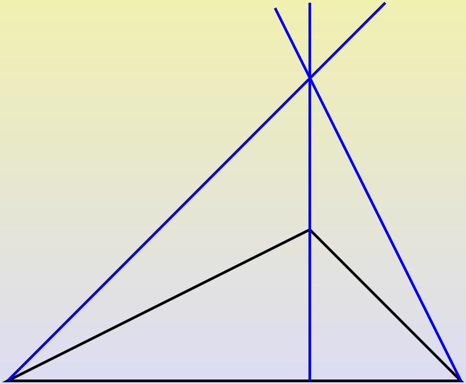
Incentro

É il centro della circonferenza inscritta nel triangolo.
L'incentro è l'intersezione delle bisettrici del triangolo.



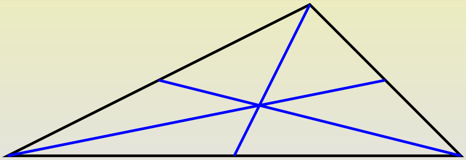
Ortocentro

É l'unica intersezione delle altezze del triangolo.



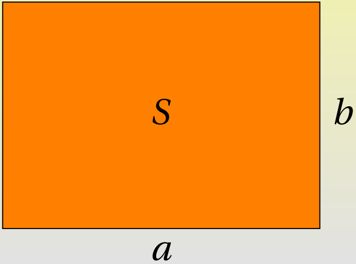
Baricentro

É l'unica intersezione delle mediane del triangolo.



Aree e teorema di Pitagora

Area del rettangolo:

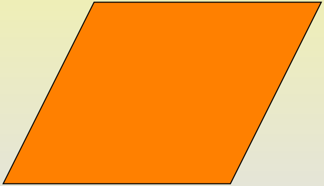


Area

$$S = ab$$

Aree e teorema di Pitagora

Area del parallelogramma:

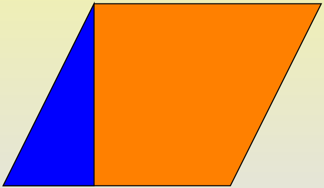


Area

$$S = ab$$

Aree e teorema di Pitagora

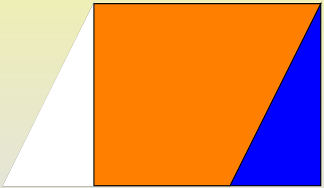
Area del parallelogramma:



Area

$$S = ab$$

Area del parallelogramma:

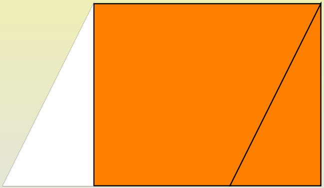


Area

$$S = ab$$

Aree e teorema di Pitagora

Area del parallelogramma:

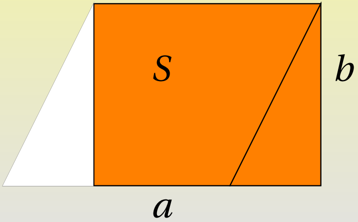


Area

$$S = ab$$

Aree e teorema di Pitagora

Area del parallelogramma:

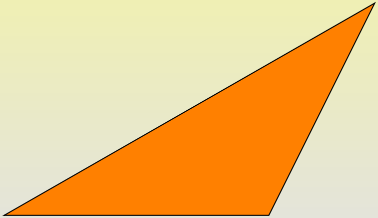


Area

$$S = ab$$

Aree e teorema di Pitagora

Area del triangolo:

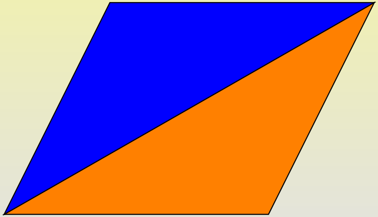


Area

$$S = \frac{1}{2}ab$$

Aree e teorema di Pitagora

Area del triangolo:

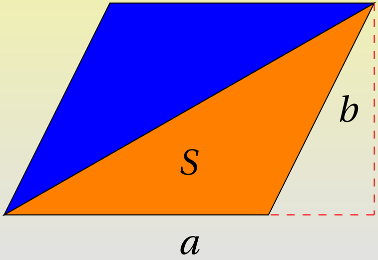


Area

$$S = \frac{1}{2}ab$$

Aree e teorema di Pitagora

Area del triangolo:

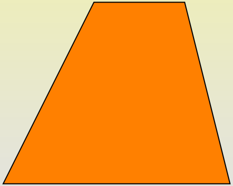


Area

$$S = \frac{1}{2} a b$$

Aree e teorema di Pitagora

Area del trapezio:

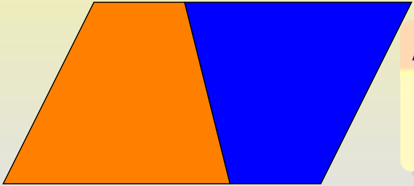


Area

$$S = \frac{1}{2}(a+b)\,c$$

Aree e teorema di Pitagora

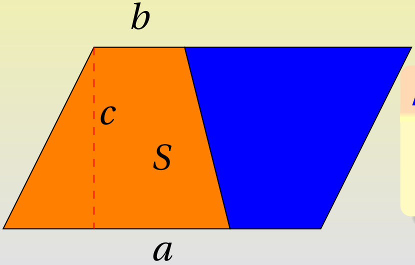
Area del trapezio:



Area

$$S = \frac{1}{2}(a+b)\,c$$

Area del trapezio:

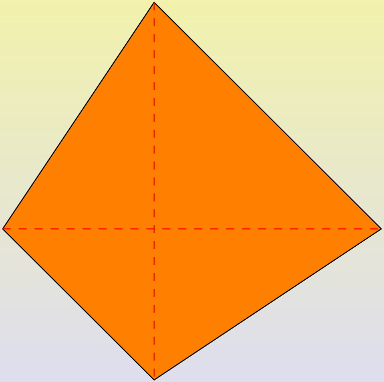


Area

$$S = \frac{1}{2}(a+b)\,c$$

Aree e teorema di Pitagora

Area di un quadrilatero con diagonali perpendicolari:

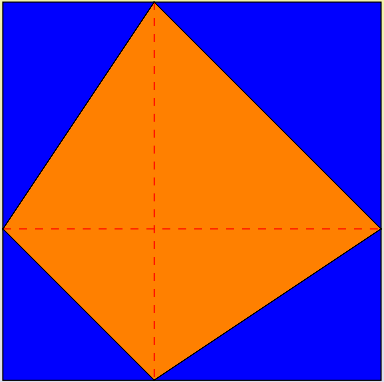


Area

$$S = \frac{1}{2}ab$$

Aree e teorema di Pitagora

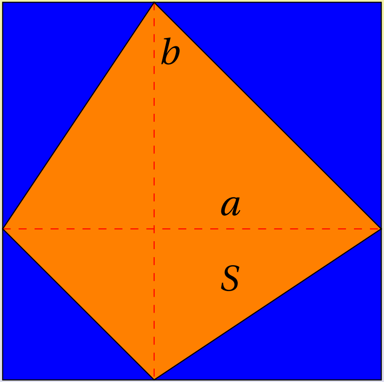
Area di un quadrilatero con diagonali perpendicolari:



Area

$$S = \frac{1}{2}ab$$

Area di un quadrilatero con diagonali perpendicolari:

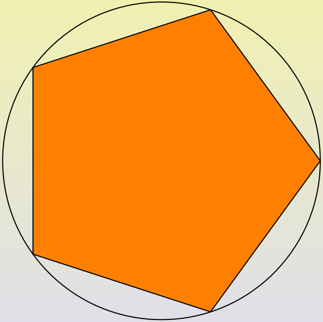


Area

$$S = \frac{1}{2} a b$$

Aree e teorema di Pitagora

Area di un poligono regolare di n lati:

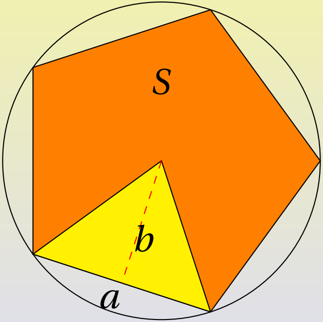


Area

$$S = n\frac{ab}{2}$$

Aree e teorema di Pitagora

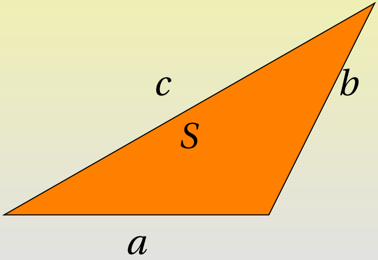
Area di un poligono regolare di n lati:



Area

$$S = n\frac{ab}{2}$$

Area di un triangolo dati i lati:



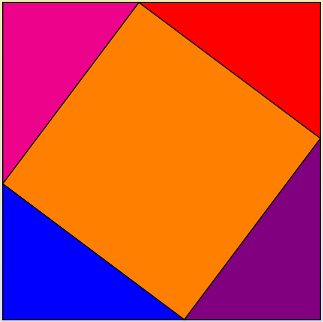
Teorema di Erone:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

Aree e teorema di Pitagora

Teorema di Pitagora, dimostrazione con quadrati concentrici:



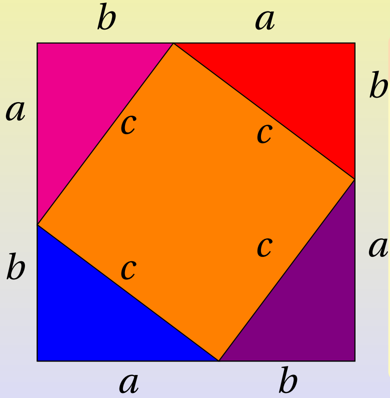
Dimostrazione

$$c^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}ab\right) = (a+b)^2$$

$$c^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Teorema di Pitagora, dimostrazione con quadrati concentrici:



Dimostrazione

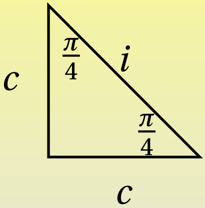
$$c^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}ab\right) = (a+b)^2$$

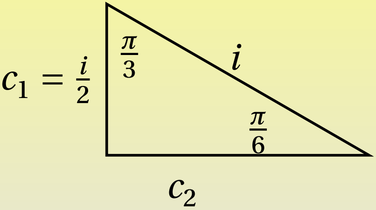
$$c^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Aree e teorema di Pitagora

Triangoli rettangoli notevoli





$$i^2 = c^2 + c^2 \rightarrow i^2 = 2c^2$$

$$i = \sqrt{2}c$$

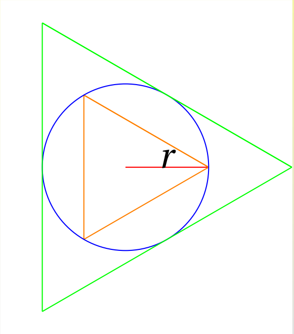
$$c = \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$i^2 = c_1^2 + c_2^2 \rightarrow i^2 = \frac{i^2}{4} + c_2^2$$

$$c_2^2 = \frac{3}{4}i^2 \rightarrow c_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

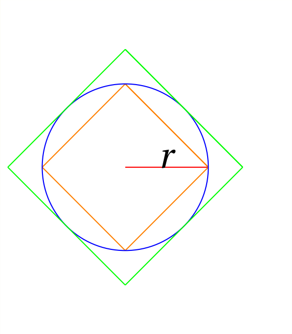
Aree e teorema di Pitagora

n	$2p_{int}$	$2p_{est}$
3	$2r \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$2r \cdot 3\sqrt{3}$
4	$2r \cdot 2\sqrt{2}$	$2r \cdot 4$
5	$2r \cdot 5\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$	$2r \cdot 5\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$
6	$2r \cdot 3$	$2r \cdot 2\sqrt{3}$
...	...	...
∞	$2r\pi$	$2r\pi$



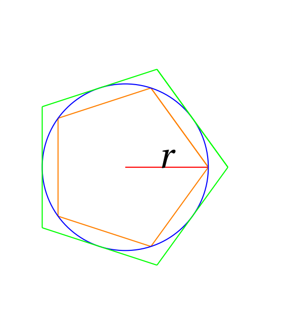
Aree e teorema di Pitagora

n	$2p_{int}$	$2p_{est}$
3	$2r \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$2r \cdot 3\sqrt{3}$
4	$2r \cdot 2\sqrt{2}$	$2r \cdot 4$
5	$2r \cdot 5\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$	$2r \cdot 5\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$
6	$2r \cdot 3$	$2r \cdot 2\sqrt{3}$
...	...	...
∞	$2r\pi$	$2r\pi$



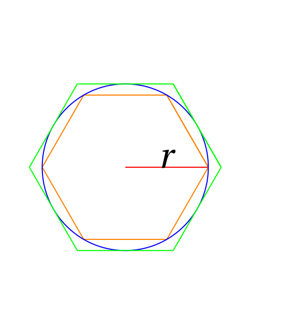
Aree e teorema di Pitagora

n	$2p_{int}$	$2p_{est}$
3	$2r \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$2r \cdot 3\sqrt{3}$
4	$2r \cdot 2\sqrt{2}$	$2r \cdot 4$
5	$2r \cdot 5\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$	$2r \cdot 5\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$
6	$2r \cdot 3$	$2r \cdot 2\sqrt{3}$
...	...	...
∞	$2r\pi$	$2r\pi$



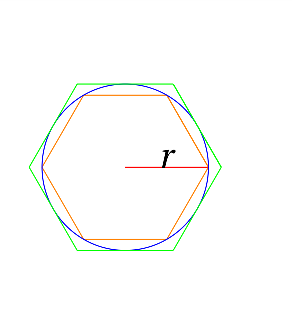
Aree e teorema di Pitagora

n	$2p_{int}$	$2p_{est}$
3	$2r \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$2r \cdot 3\sqrt{3}$
4	$2r \cdot 2\sqrt{2}$	$2r \cdot 4$
5	$2r \cdot 5\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$	$2r \cdot 5\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$
6	$2r \cdot 3$	$2r \cdot 2\sqrt{3}$
...	...	...
∞	$2r\pi$	$2r\pi$



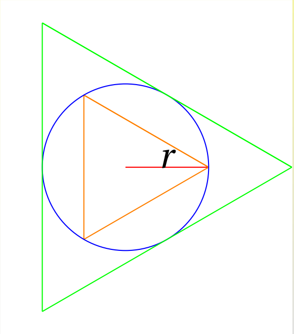
Aree e teorema di Pitagora

n	$2p_{int}$	$2p_{est}$
3	$2r \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$2r \cdot 3\sqrt{3}$
4	$2r \cdot 2\sqrt{2}$	$2r \cdot 4$
5	$2r \cdot 5\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$	$2r \cdot 5\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$
6	$2r \cdot 3$	$2r \cdot 2\sqrt{3}$
...	...	...
∞	$2r\pi$	$2r\pi$



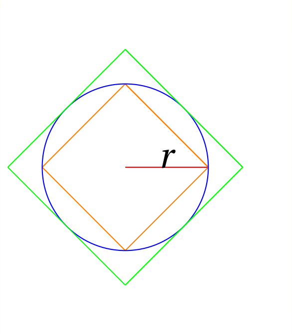
Aree e teorema di Pitagora

n	S_{int}	S_{est}
3	$\frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot r^2$	$3\sqrt{3} \cdot r^2$
4	$2 \cdot r^2$	$4 \cdot r^2$
5	$\frac{5}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cdot r^2$	$5\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) \cdot r^2$
6	$\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot r^2$	$2\sqrt{3} \cdot r^2$
...	...	...
∞	$\pi \cdot r^2$	$\pi \cdot r^2$



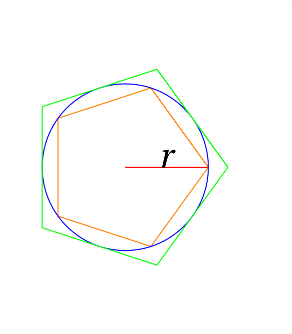
Aree e teorema di Pitagora

n	S_{int}	S_{est}
3	$\frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot r^2$	$3\sqrt{3} \cdot r^2$
4	$2 \cdot r^2$	$4 \cdot r^2$
5	$\frac{5}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cdot r^2$	$5\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) \cdot r^2$
6	$\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot r^2$	$2\sqrt{3} \cdot r^2$
...	...	...
∞	$\pi \cdot r^2$	$\pi \cdot r^2$



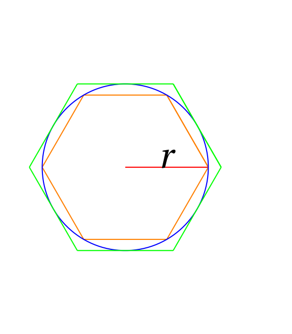
Aree e teorema di Pitagora

n	S_{int}	S_{est}
3	$\frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot r^2$	$3\sqrt{3} \cdot r^2$
4	$2 \cdot r^2$	$4 \cdot r^2$
5	$\frac{5}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cdot r^2$	$5\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) \cdot r^2$
6	$\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot r^2$	$2\sqrt{3} \cdot r^2$
...	...	...
∞	$\pi \cdot r^2$	$\pi \cdot r^2$



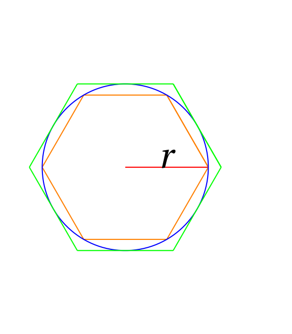
Aree e teorema di Pitagora

n	S_{int}	S_{est}
3	$\frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot r^2$	$3\sqrt{3} \cdot r^2$
4	$2 \cdot r^2$	$4 \cdot r^2$
5	$\frac{5}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cdot r^2$	$5\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) \cdot r^2$
6	$\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot r^2$	$2\sqrt{3} \cdot r^2$
...	...	...
∞	$\pi \cdot r^2$	$\pi \cdot r^2$

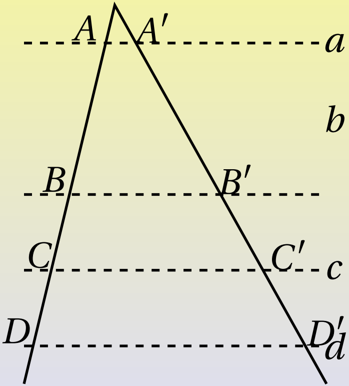


Aree e teorema di Pitagora

n	S_{int}	S_{est}
3	$\frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot r^2$	$3\sqrt{3} \cdot r^2$
4	$2 \cdot r^2$	$4 \cdot r^2$
5	$\frac{5}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cdot r^2$	$5\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) \cdot r^2$
6	$\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot r^2$	$2\sqrt{3} \cdot r^2$
...	...	...
∞	$\pi \cdot r^2$	$\pi \cdot r^2$



Teorema di Talete



Ipotesi:

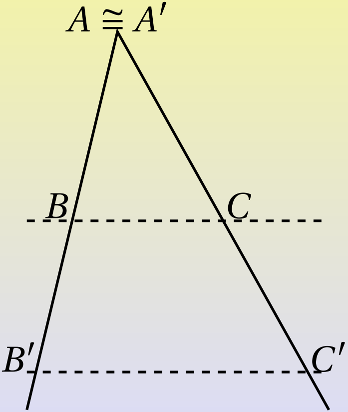
$$a \parallel b \parallel c \parallel d$$

Tesi:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

(dimostrazione qui omessa)

Triangoli simili



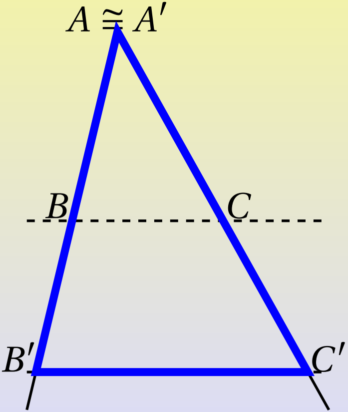
$ABC \sim A'B'C'$

se

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

e $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$ e $\gamma = \gamma'$

Triangoli simili



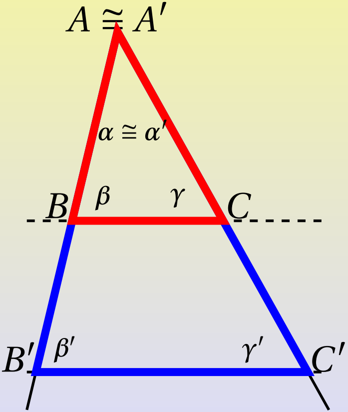
$ABC \sim A'B'C'$

se

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

e $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$ e $\gamma = \gamma'$

Triangoli simili



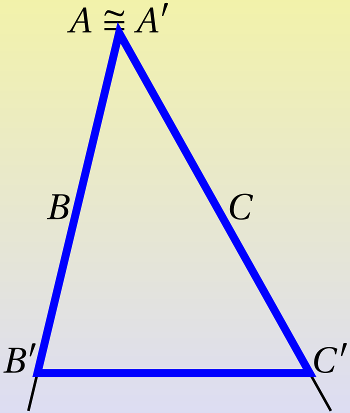
$ABC \sim A'B'C'$

se

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

e $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$ e $\gamma = \gamma'$

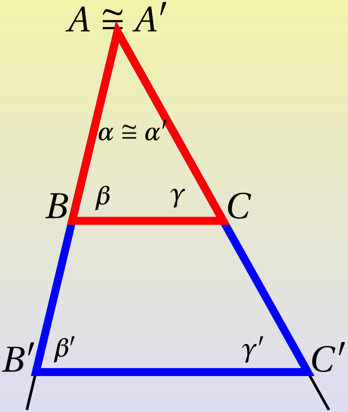
Primo criterio di similitudine



$ABC \sim A'B'C'$

se $\alpha = \alpha'$ e $\gamma = \gamma'$

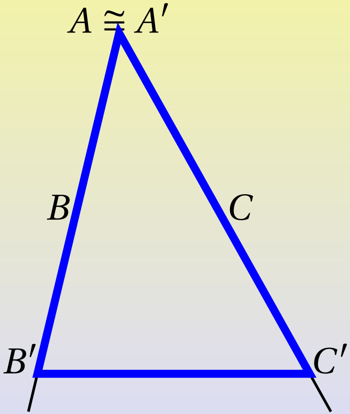
Primo criterio di similitudine



$ABC \sim A'B'C'$

se $\alpha = \alpha'$ e $\gamma = \gamma'$

Secondo criterio di similitudine

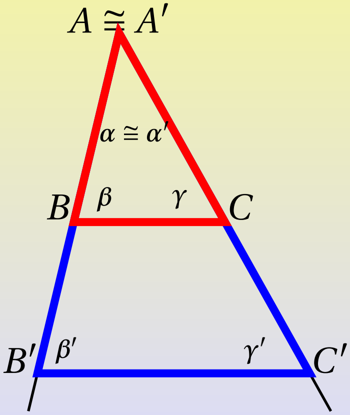


$ABC \sim A'B'C'$

se $\alpha = \alpha'$ e

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Secondo criterio di similitudine

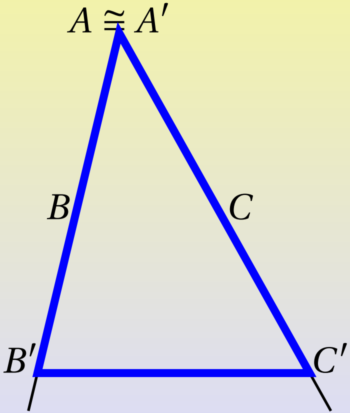


$ABC \sim A'B'C'$

se $\alpha = \alpha'$ e

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Terzo criterio di similitudine

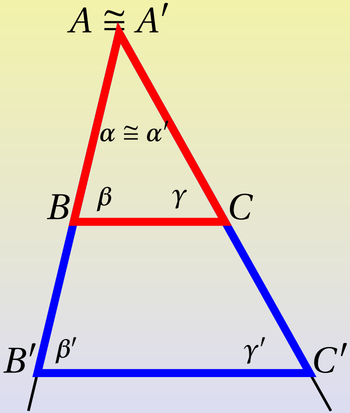


$ABC \sim A'B'C'$

se

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Terzo criterio di similitudine

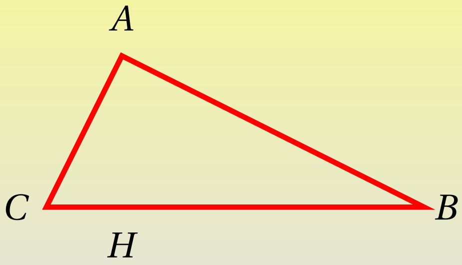


$ABC \sim A'B'C'$

se

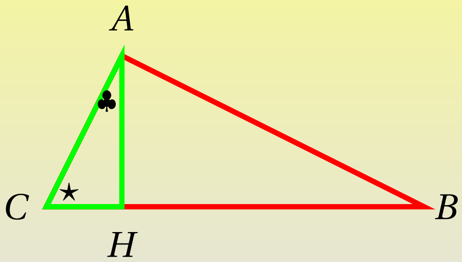
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Primo teorema di Euclide



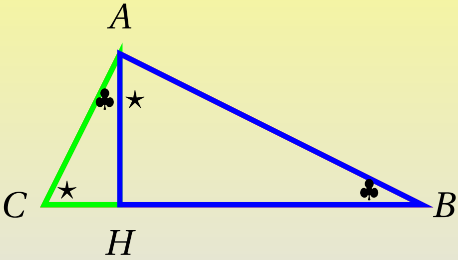
$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CH} \longrightarrow AC^2 = BC \cdot CH$$

Primo teorema di Euclide



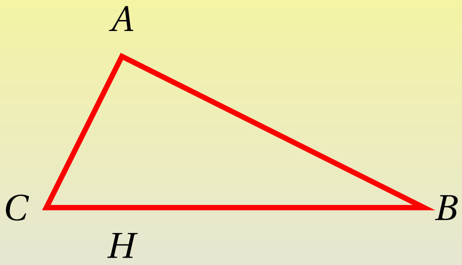
$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CH} \rightarrow AC^2 = BC \cdot CH$$

Primo teorema di Euclide



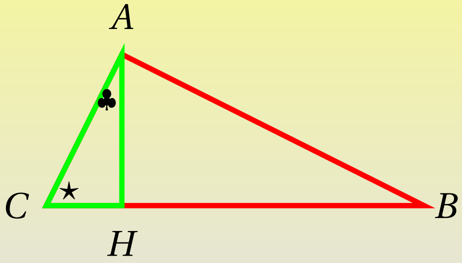
$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CH} \longrightarrow AC^2 = BC \cdot CH$$

Secondo teorema di Euclide



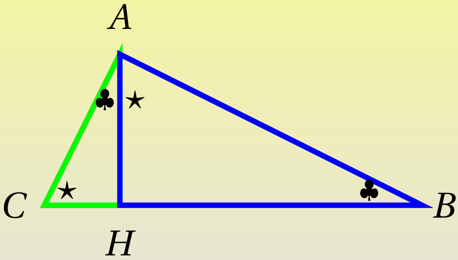
$$\frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \rightarrow AH^2 = BH \cdot CH$$

Secondo teorema di Euclide



$$\frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \rightarrow AH^2 = BH \cdot CH$$

Secondo teorema di Euclide



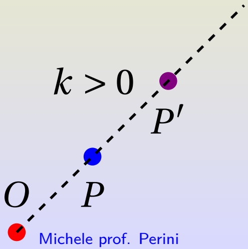
$$\frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \rightarrow AH^2 = BH \cdot CH$$

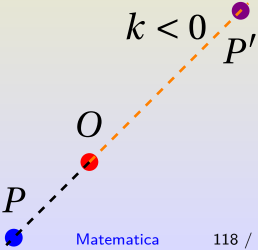
Omotetie

Omotetia

Si definisce omotetia di centro O e rapporto $k \in \mathbb{R} - 0$ la trasformazione che associa as ogni punto P del piano un punto P' tale che:

- se $k > 0$, P' appartiene alla semiretta OP
- se $k < 0$, P' appartiene alla semiretta opposta ad OP
- $OP' = |k|OP$





Omotetie

Proprietà delle omotetie

Una omotetia trasforma di rapporto k:

- una retta in una parallela alla prima
- un angolo in un angolo congruente
- un segmento in un segmento parallelo al primo tale che il loro rapporto è uguale $|k|$

Omotetie

Omotetie nel piano cartesiano

Una omotetia di centro $O(0,0)$ e rapporto $k \neq 0$ nel piano cartesiano è caratterizzata dalla trasformazione dirette e inverse:

$$T : \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \to T^{-1} : \begin{cases} x = \frac{1}{k}x' \\ y = \frac{1}{k}y' \end{cases}$$

Proprietà delle omotetie nel piano cartesiano

Una omotetia di centro $O(0,0)$ e rapporto $k \neq 0$ nel piano cartesiano trasforma:

- $P(\alpha,\beta)$ in $P'(k\alpha,k\beta)$, i due punti appartengono entrambi alla retta passante per O di equazione $\alpha y = \beta x$
- $OP = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ in $OP' = \sqrt{k^2\alpha^2+k^2\beta^2} = |k|\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = |k|OP$

Omotetie

Omotetie e triangoli

Una omotetia di centro $O(0,0)$ e rapporto $k \neq 0$ nel piano cartesiano trasforma:

- un triangolo ABC in un triangolo $A'B'C' \sim ABC$
- un triangolo ABC in un triangolo $A'B'C'$ con perimetri $2p_{ABC} = |k| 2p_{A'B'C'}$
- un triangolo ABC in un triangolo $A'B'C'$ con aree $S_{ABC} = k^2 S_{A'B'C'}$

Quanto detto per i triangoli vale, in generale, per i poligoni.

Definizione classica di probabilità

La probabilità di un evento casuale (aleatorio, stocastico) è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli al presentarsi dell'evento (k) e il numero totale dei casi possibili (n), purchè tutti i casi siano equiprobabili. In simboli:

$$p(E) = \frac{k}{n}$$

La definizione classica è operativa ma presenta delle problematiche formali. La definizione ad esempio non risulta applicabile nel caso vi siano infiniti casi e definisce la probabilità utilizzando il principio di equiprobabilità.

Evento

Un evento è un insieme che si associa ad un determinato esito di un esperimento aleatorio (casuale), indichiamo gli eventi con la notazione E_1, E_2, E_3, E_4, ...

Evento elementare

Un evento elementare è un elemento $e \in E_i$.

Spazio campionario

Lo spazio campionario è un insieme che contiene tutti gli eventi relativi ad un esperimento aleatorio, in simboli $S = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup \dots$

Evento impossibile

Un evento impossibile è un evento associato ad un insieme vuoto $\emptyset$.

Evento certo

Un evento certo è un evento associato all'intero spazio campionario S.

Eventi contrari

Due eventi E_i ed E_j si dicono contrari se $\overline{E_i} = S - E_i = E_j$.

Eventi incompatibili

Due eventi E_i ed E_j si dicono incompatibili se $E_i \cap E_j = \emptyset$.

Definizione assiomatica della probabilità

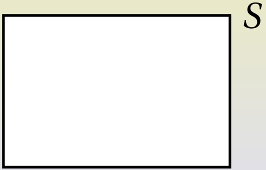
La probabilità di un evento E_i è il numero $p(E_i)$ associato univocamente all'evento che gode delle proprietà:

- $p(E_i) \geq 0$ per ogni i
- $p(S) = 1$
- $p(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup \dots) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) + p(E_4) + \dots$ se gli eventi E_i sono tra loro tutti incompatibili

La definizione assiomatica della probabilità non dà indicazioni su come effettuare il calcolo della probabilità ma solo sulle proprietà ad essa associate. In effetti la modalità per associare un valore alla probabilità non è univoca.

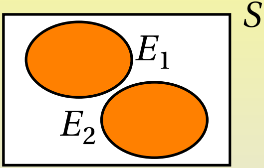
Proprietà della probabilità e insiemi

$$p(S) = 1$$

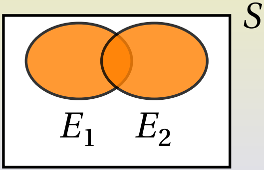


$$p(\varnothing) = 0$$

Proprietà della probabilità e insiemi

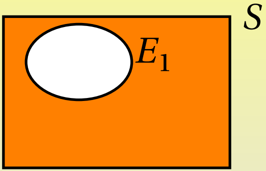


$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$$

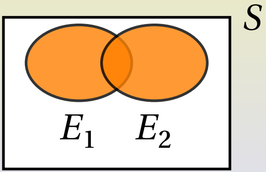


$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2$$

Proprietà della probabilità e insiemi



$$p(\overline{E_1}) = 1 - p(E_1)$$



$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1|E_2)p(E_2) =$$

$$= p(E_2|E_1)p(E_1)$$

essendo $p(E_1|E_2) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)}$ e $p(E_2|E_1) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_1)}$

Eventi indipendenti

Due eventi E_1 ed E_2 si dicono indipendenti se $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1)p(E_2)$. Cioè se la loro probabilità condizionata, E_1 sapendo che E_2 è $p(E_1|E_2) = p(E_1)$ e quella di E_2 sapendo che E_1 è $p(E_2|E_1) = p(E_2)$.