Fisica

Appunti di Fisica 3

Michele prof. Perini

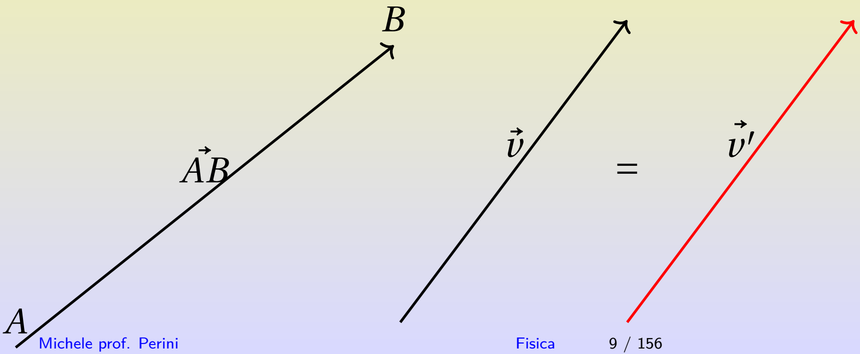
IISS Copernico Pasoli - Liceo Scientifico

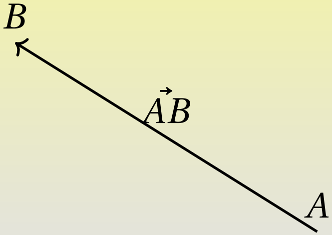
A.S. 2024-2025

- Ciclo di Carnot
- Teorema di Carnot
- Entropia
- Entropia e sua variazione
- Secondo principio e probabilità

Definizione geometrica di vettore

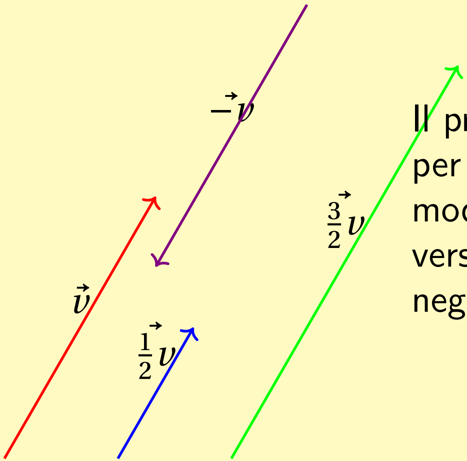
Un vettore è un segmento orientato caratterizzato da un modulo, una direzione e un verso. Due vettori con medesimo modulo, direzione parallela e medesimo verso sono equipollenti.





- Il modulo del vettore $\vec{AB}$ è proporzionale alla lunghezza del segmento e si indica con i simboli $\left|\vec{AB}\right| = AB$.
- La direzione è la retta per A e B.
- il verso è indicato dalla freccia.
- A è detto punto di applicazione.

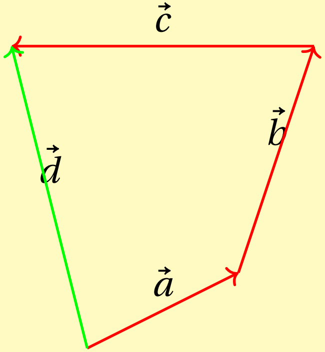
Prodotto scalare per vettore



Il prodotto di uno scalare per un vettore modifica il modulo del vettore ed il verso in caso di scalare negativo.

$$|\alpha\vec{v}| = |\alpha|\,|\vec{v}|$$

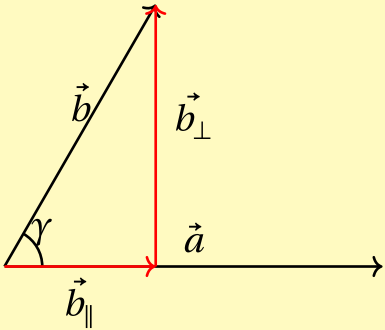
Somma tra vettori



$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

É possibile sommare i vettori eventualmente traslandoli e disponendo la coda del successivo in corrispondenza della punta del precedente.

Prodotto scalare, caso $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$

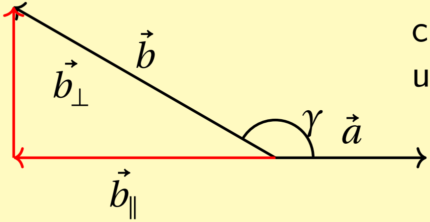


Il prodotto scalare è una operazione commutativa che abbina a due vettori uno scalare.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}_\parallel =$$

$$= |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}_\parallel\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\gamma$$

Prodotto scalare, caso $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$



Il prodotto scalare è una operazione commutativa che abbina a due vettori uno scalare.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}_\parallel =$$

$$= -\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}_\parallel\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\gamma$$

Il prodotto scalare è massimo (in valore assoluto) tra vettori paralleli e vale zero tra vettori perpendicolari.

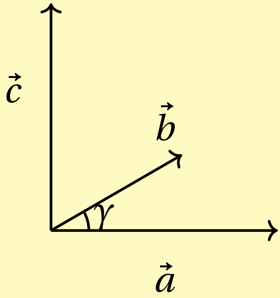
$$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right| \leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

In generale vale la relazione:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\gamma$$

Prodotto vettoriale (direzione)



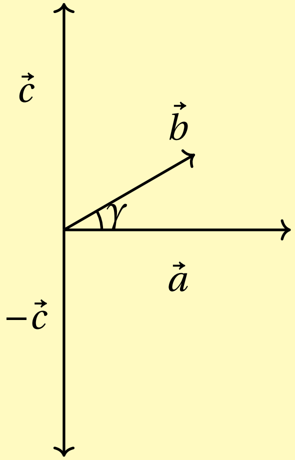
Il prodotto vettoriale è una operazione che abbina a due vettori un terzo vettore perpendicolare ad essi.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{c} \perp \vec{a}$$

$$\vec{c} \perp \vec{b}$$

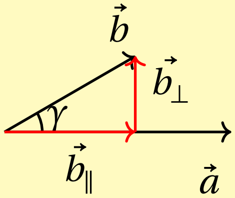
Prodotto vettoriale (verso)



Il prodotto vettoriale è anticommutativo.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$$

Prodotto vettoriale (modulo)



$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\times\vec{b}_\perp\right| =$$

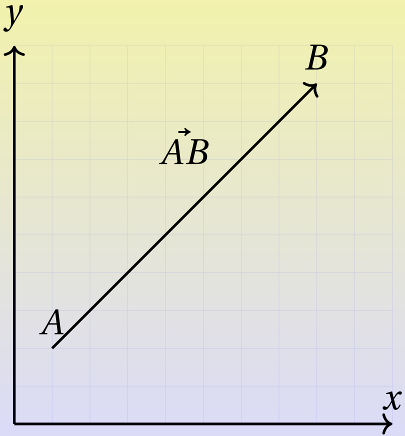
$$= \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}_\perp\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\gamma$$

Il prodotto vettoriale è massimo (in modulo) tra vettori perpendicolari e vale zero (il vettore zero è un vettore di modulo nullo) tra vettori paralleli.

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

Un vettore può essere definito come una ennupla ordinata sulla quale si definiscono le operazioni di prodotto scalare-vettore e di somma.

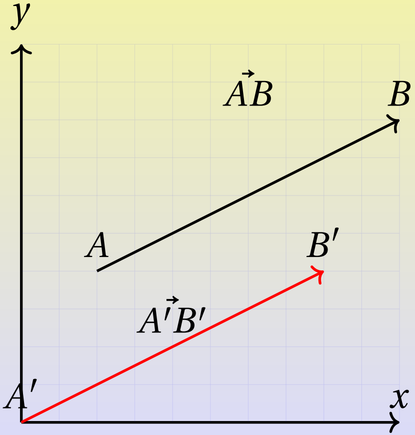


$$A\,(x_A, y_A, z_A)$$

$$B\,(x_B, y_B, z_B)$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Due vettori sono equivalenti se hanno le medesime rispettive componenti. Due vettori equivalenti hanno lo stesso modulo, direzione e verso.



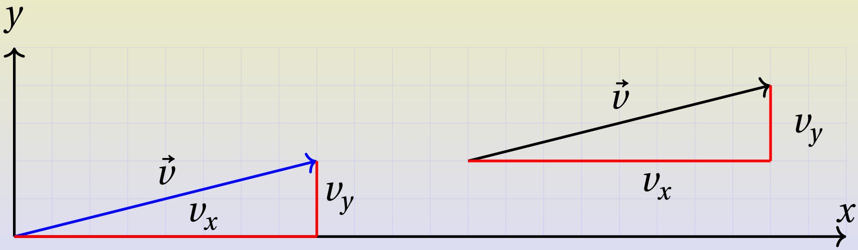
$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} =$$

$$= \vec{A'B'} = \begin{pmatrix} x_{B'} - x_{A'} \\ y_{B'} - y_{A'} \\ z_{B'} - z_{A'} \end{pmatrix}$$

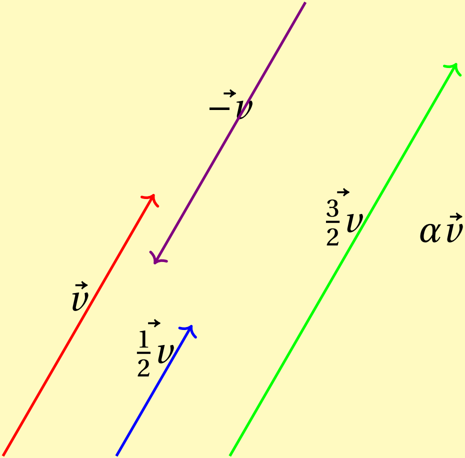
Modulo di un vettore

Dato il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ il suo modulo è

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



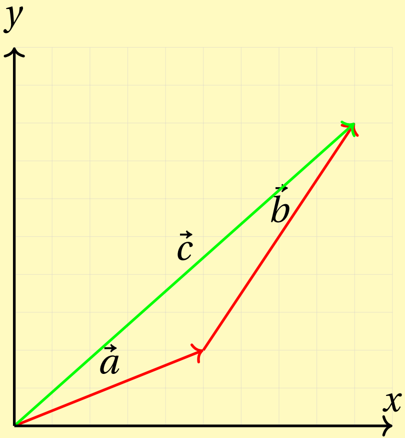
Prodotto scalare per vettore



$$\alpha\vec{v} = \alpha\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_x \\ \alpha v_y \\ \alpha v_z \end{pmatrix}$$

$$|\alpha\vec{v}| = |\alpha|\,|\vec{v}|$$

Somma tra vettori

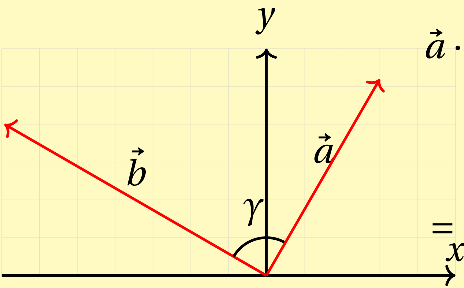


$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

Prodotto scalare

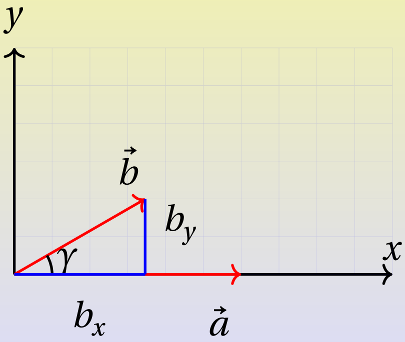


$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=$$

$$=a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z =$$

$$=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\gamma$$

La definizione algebrica di prodotto scalare e quella geometrica corrispondono, basta scegliere opportunamente il sistema di riferimento in cui inserire i vettori per verificarlo.



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$a_x b_x = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\gamma$$

Il prodotto scalare è strettamente legato al modulo di un vettore:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \left(\vec{v}\right)^2 = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \left|\vec{v}\right|^2$$

Prodotto vettoriale

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Di seguito vedremo come il prodotto vettoriale così definito, insieme alla definizione di prodotto scalare, restituisca proprio le caratteristiche che definivano il prodotto vettoriale "geometrico".

Perpendicolarità

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{a} = 0 \leftrightarrow \vec{a} \perp \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{b} = 0 \leftrightarrow \vec{b} \perp \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

Basta eseguire i calcoli.

Anticommutatività

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$$

Basta verificare che data la definizione di prodotto vettoriale, ogni componente del vettore risultato cambia segno se si scambia a con b.

Modulo

É sufficiente verificare l'identità:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\gamma$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2 = \left(|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\gamma\right)^2$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2 = |\vec{a}|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2\cdot\sin^2\gamma$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2 = |\vec{a}|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2\cdot\left(1-\cos^2\gamma\right)$$

$$\left(a_y b_z - a_z b_y\right)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)^2 =$$

$$= \left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right)^2 \cdot \left(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2\right)^2 - |\vec{a}|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 \cdot \cos^2 \gamma$$

$$\cdots$$

$$|\vec{a}|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 \cdot \cos^2 \gamma = \left(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\right)^2$$

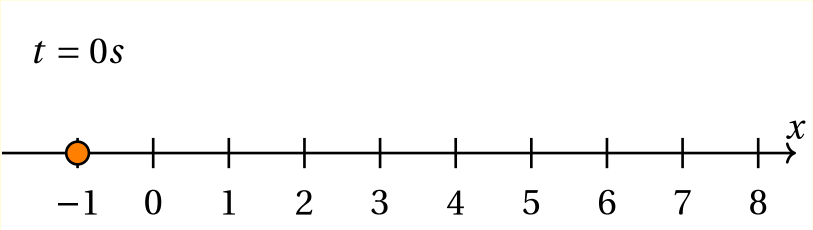
Il membro di sinistra dell'ultima equazione rappresenta la definizione "geometrica" del quadrato del prodotto scalare dei due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, mentre quello di destra ne rappresenta la definizione "algebrica".

Cinematica del punto

Ci occuperemo di seguito della descrizione del moto dei corpi puntiformi, senza occuparci delle cause del moto. Definiremo le grandezze fisiche che descrivono il moto dei corpi, occupandoci dapprima del caso unidimensionale e poi dei casi bidimensionale e tridimensionale.
Per descrivere il moto di un corpo è necessario stabilire un sistema di riferimento sia spaziale che temporale.

Posizione

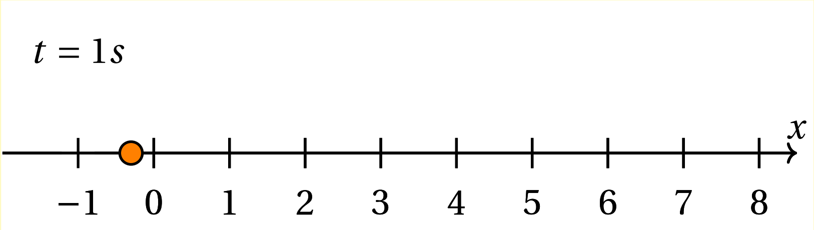
La posizione di un corpo può essere descritta da una funzione del tempo, cioè, una relazione che abbini ad ogni istante di tempo una posizione.



In simboli la posizione di un dato oggetto in un certo istante di tempo si sintetizza con la scrittura: $x(t)$.

Posizione

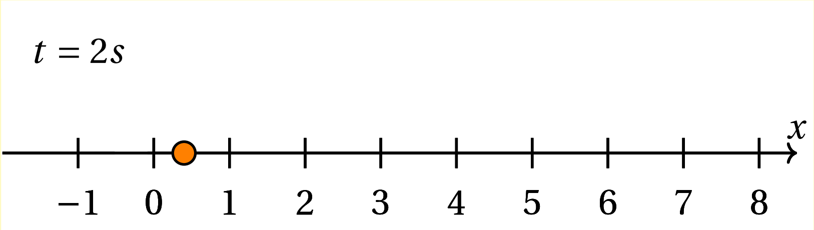
La posizione di un corpo può essere descritta da una funzione del tempo, cioè, una relazione che abbini ad ogni istante di tempo una posizione.



In simboli la posizione di un dato oggetto in un certo istante di tempo si sintetizza con la scrittura: $x(t)$.

Posizione

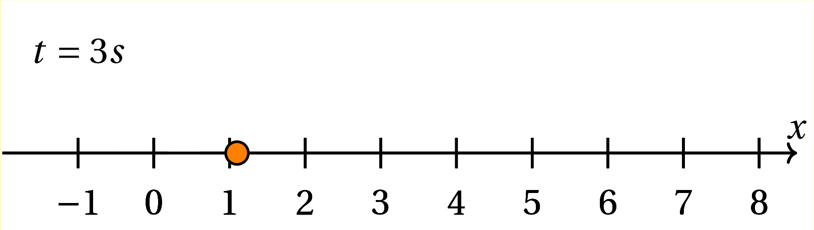
La posizione di un corpo può essere descritta da una funzione del tempo, cioè, una relazione che abbini ad ogni istante di tempo una posizione.



In simboli la posizione di un dato oggetto in un certo istante di tempo si sintetizza con la scrittura: $x(t)$.

Posizione

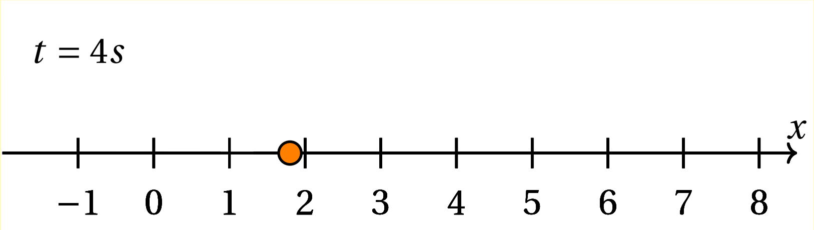
La posizione di un corpo può essere descritta da una funzione del tempo, cioè, una relazione che abbini ad ogni istante di tempo una posizione.



In simboli la posizione di un dato oggetto in un certo istante di tempo si sintetizza con la scrittura: $x(t)$.

Posizione

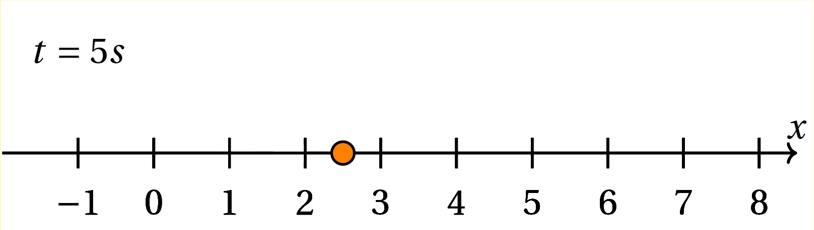
La posizione di un corpo può essere descritta da una funzione del tempo, cioè, una relazione che abbini ad ogni istante di tempo una posizione.



In simboli la posizione di un dato oggetto in un certo istante di tempo si sintetizza con la scrittura: $x(t)$.

Posizione

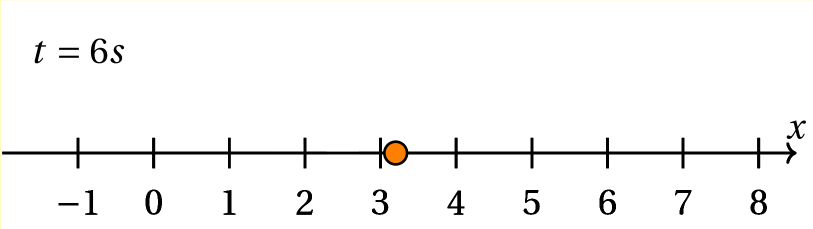
La posizione di un corpo può essere descritta da una funzione del tempo, cioè, una relazione che abbini ad ogni istante di tempo una posizione.



In simboli la posizione di un dato oggetto in un certo istante di tempo si sintetizza con la scrittura: $x(t)$.

Posizione

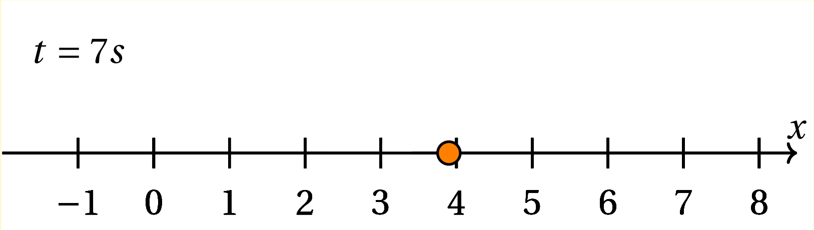
La posizione di un corpo può essere descritta da una funzione del tempo, cioè, una relazione che abbini ad ogni istante di tempo una posizione.



In simboli la posizione di un dato oggetto in un certo istante di tempo si sintetizza con la scrittura: $x(t)$.

Posizione

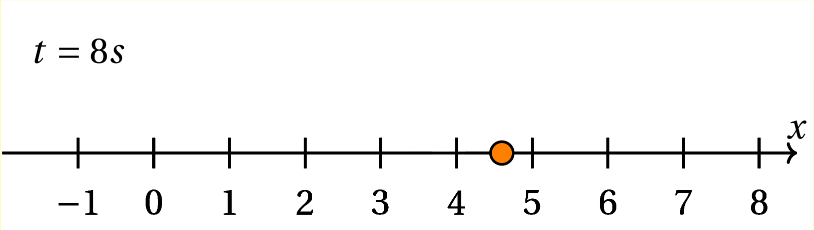
La posizione di un corpo può essere descritta da una funzione del tempo, cioè, una relazione che abbini ad ogni istante di tempo una posizione.



In simboli la posizione di un dato oggetto in un certo istante di tempo si sintetizza con la scrittura: $x(t)$.

Posizione

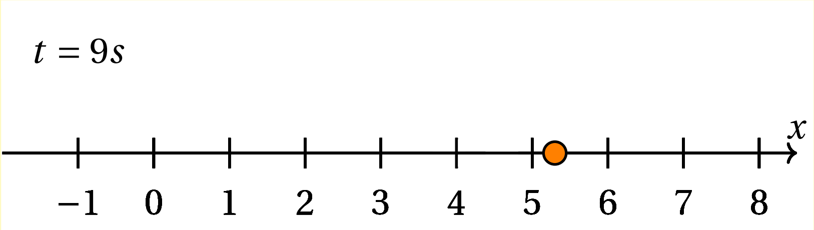
La posizione di un corpo può essere descritta da una funzione del tempo, cioè, una relazione che abbini ad ogni istante di tempo una posizione.



In simboli la posizione di un dato oggetto in un certo istante di tempo si sintetizza con la scrittura: $x(t)$.

Posizione

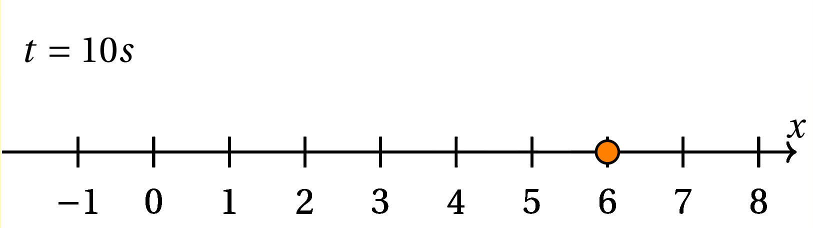
La posizione di un corpo può essere descritta da una funzione del tempo, cioè, una relazione che abbini ad ogni istante di tempo una posizione.



In simboli la posizione di un dato oggetto in un certo istante di tempo si sintetizza con la scrittura: $x(t)$.

Posizione

La posizione di un corpo può essere descritta da una funzione del tempo, cioè, una relazione che abbini ad ogni istante di tempo una posizione.



In simboli la posizione di un dato oggetto in un certo istante di tempo si sintetizza con la scrittura: $x(t)$.

Velocità media e velocità istantanea

velocità media:

$$v_{[t_1;t_2]} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

velocità istantanea (se $t_1 < t < t_2$ e $t_2 \to t_1$):

$$v(t) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{dx(t)}{dt}$$

Moto rettilineo uniforme

Il moto di un oggetto che si muove con velocità costante lungo una linea retta si dice rettilineo uniforme.

$$v(t) = v = \frac{x(t) - x(0)}{t - 0} \rightarrow x(t) = vt + x(0)$$

Grafico v-t e posizione nel moto rettilineo uniforme:

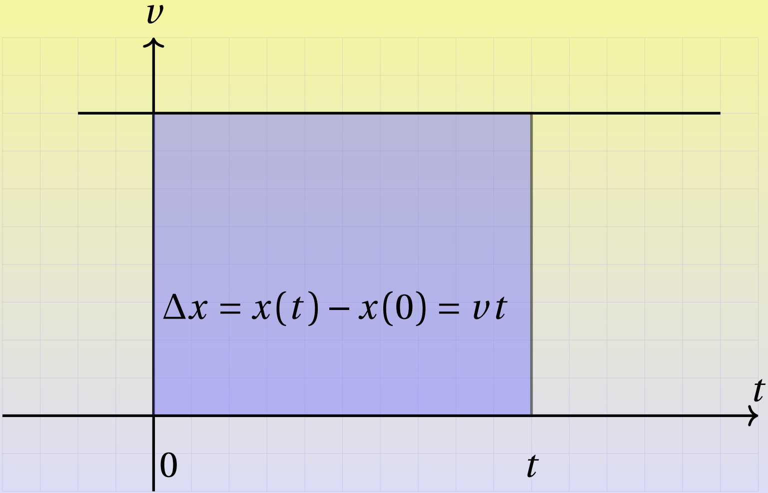
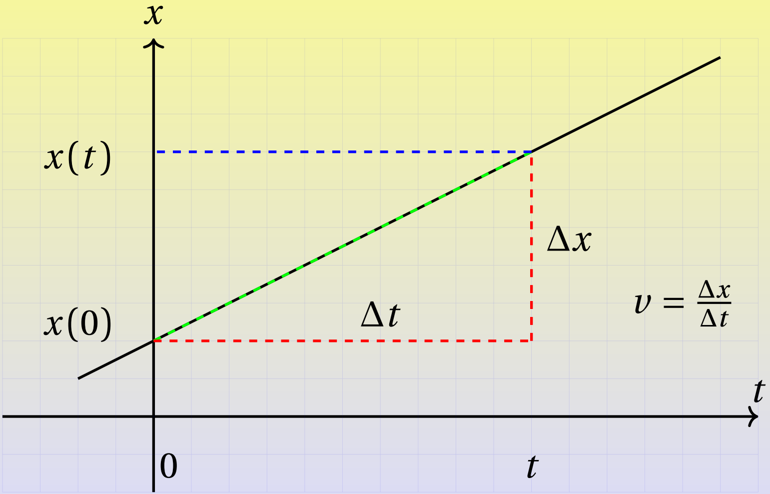


Grafico x-t e velocità nel moto rettilineo uniforme:



Accelerazione media e accelerazione istantanea

accelerazione media:

$$a_{[t_1;t_2]} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

accelerazione istantanea (se $t_1 < t < t_2$ e $t_2 \to t_1$):

$$a(t) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

Il moto di un oggetto che si muove con accelerazione costante lungo una linea retta si dice rettilineo uniformemente accelerato.

$$a(t) = a = \frac{v(t) - v(0)}{t - 0} \rightarrow v(t) = at + v(0)$$

Grafico a-t e velocità nel moto rettilineo uniformemente accelerato:

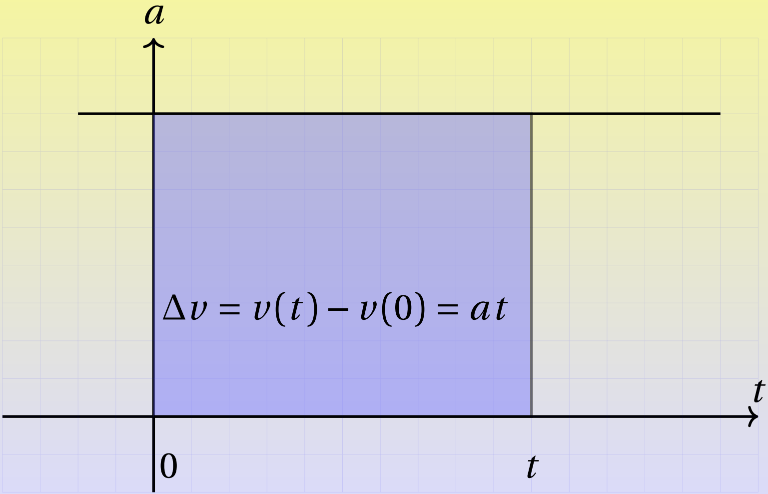


Grafico v-t e accelerazione nel moto rettilineo uniformemente accelerato:

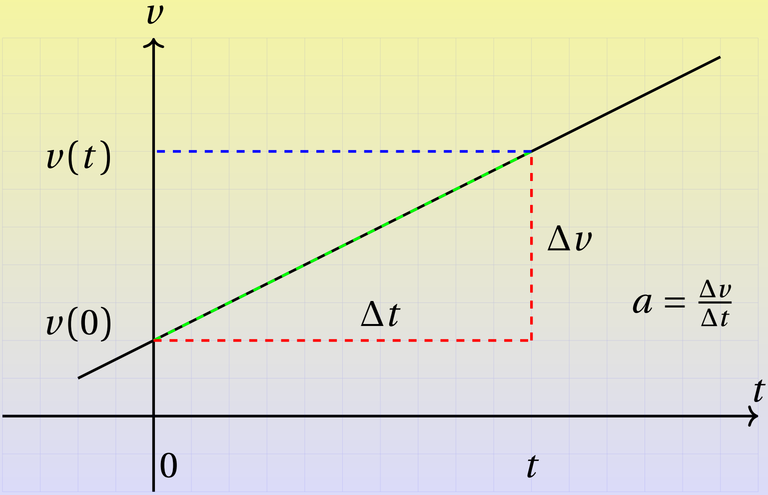
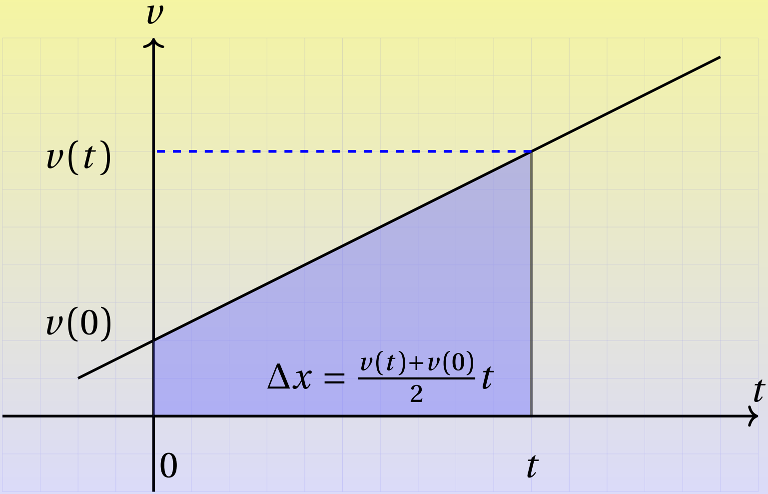


Grafico v-t e posizione nel moto rettilineo uniformemente accelerato:



Equazione del moto nel moto rettilineo uniformemente accelerato.
Dall'analisi del grafico v-t si ha che:

$$\Delta x = \frac{v(t) + v(0)}{2} t \rightarrow$$

$$\rightarrow x(t) - x(0) = \frac{at + v(0) + v(0)}{2} t \rightarrow$$

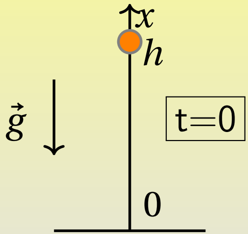
$$\rightarrow x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v(0) t + x(0)$$

In sintesi per il moto rettilineo uniformemente accelerato valgono le equazioni:

$$a(t) = a$$
$$v(t) = at + v(0)$$
$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v(0)t + x(0)$$

$$a(t) = 0$$
$$v(t) = v(0) = v$$
$$x(t) = vt + x(0)$$

Moto di caduta dei gravi:



$$x(0) = h$$
$$v(0) = 0$$
$$a(t) = -g$$

Le equazioni del moto di un corpo che cade a partire da fermo da una certa altezza h da terra sono:

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + h$$

$$v(t) = -g\,t$$

Grafico x-t e velocità:

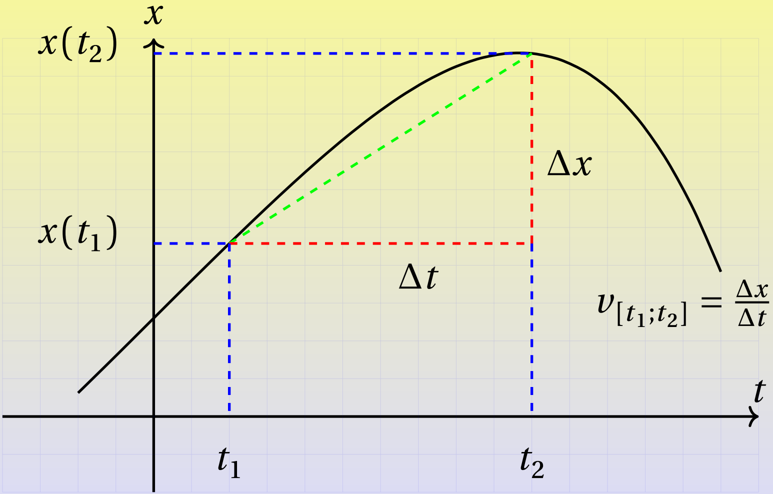


Grafico v-t e accelerazione:

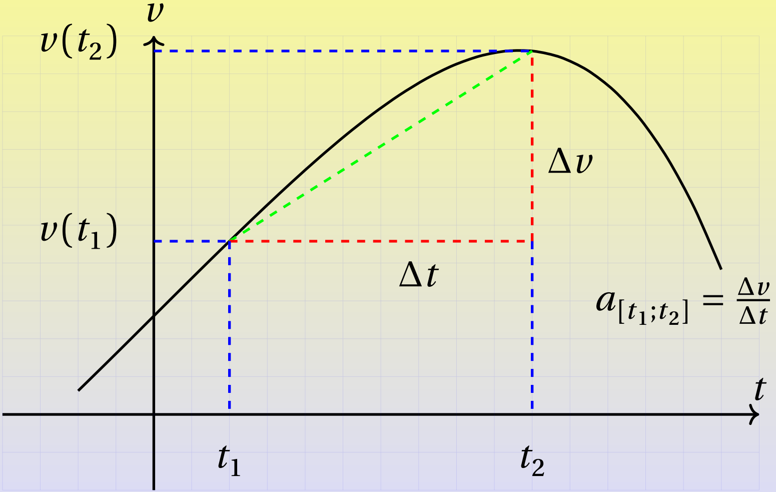


Grafico v-t e posizione:

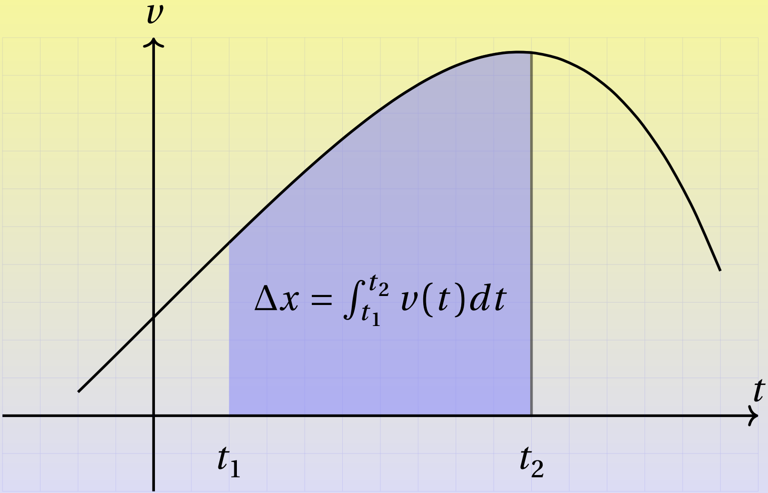
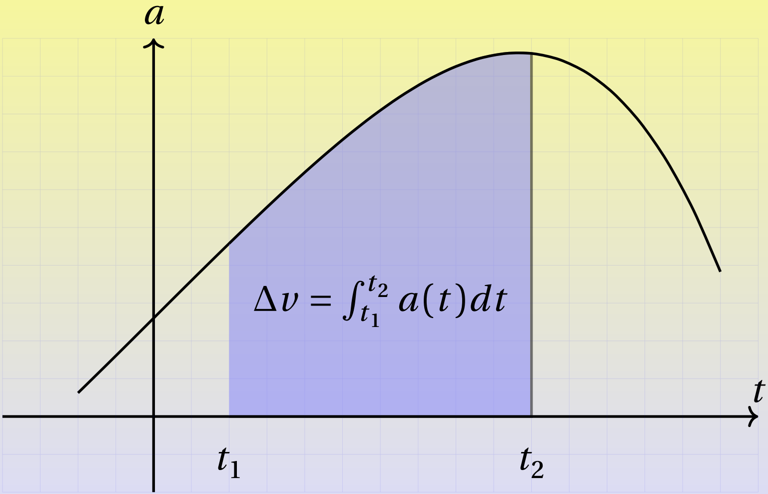
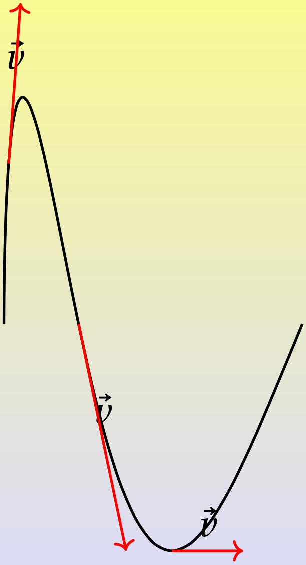


Grafico a-t e velocità:



La posizione di un punto può essere descritta da un vettore posizione le cui componenti sono le proiezioni della posizione sugli assi x, y e z al variare del tempo:

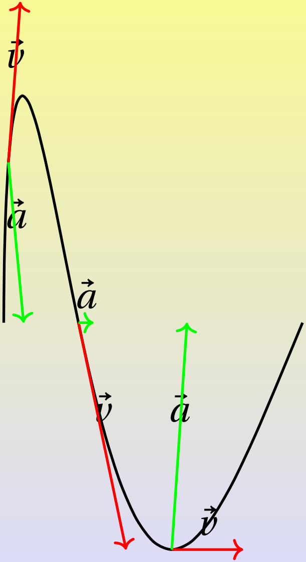
$$\vec{s(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$



Velocità:

$$\vec{v(t)} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$$

$\vec{v(t)}$ è tangente alla traiettoria in ogni punto della stessa.



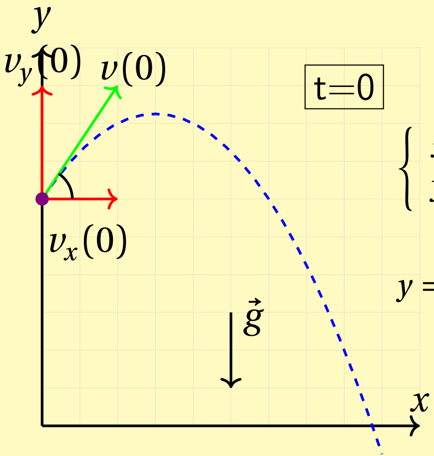
Accelerazione:

$$\vec{a(t)} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp$$

l'accelerazione può essere sempre decomposta nella somma di una accelerazione parallela e una perpendicolare alla velocità.

Moto parabolico



$$\begin{cases} x(t) = v_x(0)t \\ y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_y(0)t + y(0) \end{cases}$$

$$y = -\frac{g}{2v_x^2(0)}x^2 + \frac{v_y(0)}{v_x(0)}x + y(0)$$

Un moto circolare uniforme è il moto di un punto P che si muove con velocità costante in modulo lungo una circonferenza di raggio r. La posizione del punto è completamente definita dal raggio della circonferenza e dall'angolo γ. Il moto circolare è caratterizzato da altre grandezze descrittive caratteristiche quali periodo, frequenza e velocità angolare.

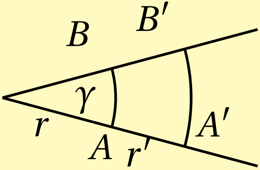
Accelerazione centripeta

Un punto in moto circolare subisce una accelerazione che si puó decomporre in una componente tangenziale (a_t) e in una radiale (a_c). La componente radiale è detta accelerazione centripeta:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

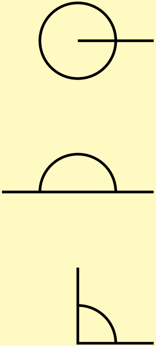
Angolo e sua unità di misura

Un angolo per la geometria razionale è la porzione di piano compresa tra due semirette. Questa definizione di angolo non è fisicamente soddisfacente in quanto misurare porzioni di piano infinitamente estese non è per nulla semplice. Si risolve la situazione definendo in modo operativo un angolo come rapporto tra arco e raggio.



$$\gamma = \frac{\widehat{AB}}{r} = \frac{\widehat{A'B'}}{r'}$$

Angolo e sua unitá di misura



L'unità di misura degli angoli è il radiante.

Angolo giro:

$\gamma = 2\pi$

Angolo piatto:

$\gamma = \pi$

Angolo retto:

$\gamma = \frac{\pi}{2}$

Periodo e frequenza

Il periodo (T) è il tempo impiegato dal punto P a compiere un giro di circonferenza. La frequenza (f) è il numero di giri effettuati dal punto P in un certo intervallo di tempo:

$$f = \frac{n}{\Delta t} = \frac{n}{nT} = \frac{1}{T}$$

l'unità di misura della frequenza è l'Hertz (Hz) oppure s^{-1}.

Velocità angolare 1D

Velocità angolare media:

$$\omega_{[t_1;t_2]} = \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\gamma}{\Delta t}$$

Velocità angolare istantanea (se $t_1 < t < t_2$ e $t_2 \to t_1$):

$$\omega(t) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d\gamma}{dt}$$

Accelerazione angolare 1D

Accelerazione angolare media:

$$\alpha_{[t_1;t_2]} = \frac{\omega(t_2) - \omega(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Accelerazione angolare istantanea (se $t_1 < t < t_2$ e $t_2 \to t_1$):

$$\alpha(t) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\omega(t_2) - \omega(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d\omega}{dt}$$

Connessione tra grandezze angolari e lineari 1D:

$$\widehat{AB} = r\gamma$$

$$v = r\omega$$

$$a_t = r\alpha$$

Sulla velocità angolare valgono le relazioni:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{2\pi r}{T r} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Le definizioni di velocità angolare e accelerazione angolare solo formalmente identiche alle definizioni di velocità e accelerazione, valgono quindi le leggi del moto:

Moto circolare uniformemente accelerato:

$$\alpha(t) = \alpha$$

$$\omega(t) = \alpha t + \omega(0)$$

$$\gamma(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega(0)t + \gamma(0)$$

Moto circolare uniforme:

$$\alpha(t) = 0$$

$$\omega(t) = \omega(0) = \omega$$

$$\gamma(t) = \omega t + \gamma(0)$$

Primo principio della dinamica o principio d'inerzia

Esistono sistemi di riferimento, detti inerziali, rispetto ai quali **un corpo** non soggetto a forze si muove di moto rettilineo uniforme.
Per un osservatore inerziale si ha che:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \rightarrow v(\vec{t}) = \vec{v}$$

Quantità di moto

La quantità di moto di un corpo è $\vec{p} = m\vec{v}$. Per gli osservatori inerziali un corpo non soggetto a forze mantiene costante la sua quantità di moto. L'effetto dell'azione di una forza su un corpo è proprio quello di far variare nel tempo la sua quantità di moto.

Si noti che in precedenza la forza era stata definita a partire dall'effetto di deformazione degli oggetti, i due effetti possono verificarsi contemporaneamente (i corpi puntiformi però non modificano la loro forma).

Secondo principio della dinamica

Per un osservatore inerziale la risultante delle forze applicate ad **un corpo** è pari al prodotto della massa del corpo per la sua accelerazione:

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Terzo principio della dinamica

In un sistema chiuso o isolato (un sistema sul quale la risultante delle forze agenti esterne al sistema è nulla) la somma delle forze agenti complessivamente su **tutti i corpi** è sempre nulla.

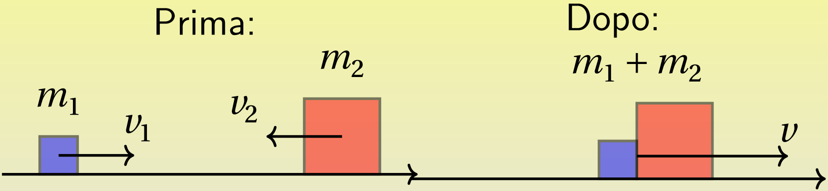
$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

Il terzo principio non è in contrasto con il secondo. Il secondo principio riguarda i singoli corpi mentre il terzo descrive una caratteristica relativa ad un insieme di corpi interagenti tra loro.

Coerentemente con quanto previsto dal secondo e dal terzo principio della dinamica in un sistema isolato la quantità di moto (complessiva del sistema) si conserva. Se $\vec{F}_i$ è la risultante delle forze applicate ad ogni singolo componente del sistema si ha che:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \rightarrow \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum_i d\vec{p}_i = \vec{0} \rightarrow \sum_i \vec{p}_i = \overrightarrow{\text{costante}}$$

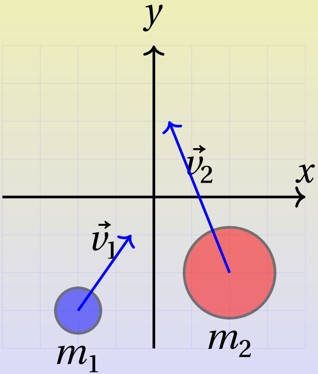


Esempio conservazione della quantità di moto 1D:

$$p_{\text{prima}} = p_{\text{dopo}}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

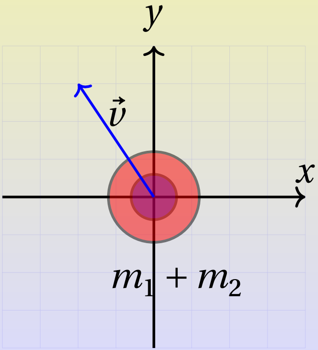
Esempio conservazione della quantità di moto 2D:
Prima:



$$\vec{p}_{\text{prima}} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 =$$

$$= m_1 \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{pmatrix}$$

Esempio conservazione della quantità di moto 2D:
Dopo:

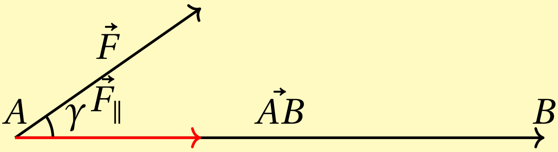


$$\vec{p}_{\text{dopo}} = (m_1 + m_2)\,\vec{v} =$$

$$= (m_1 + m_2)\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

Lavoro (forza costante e spostamento rettilineo)

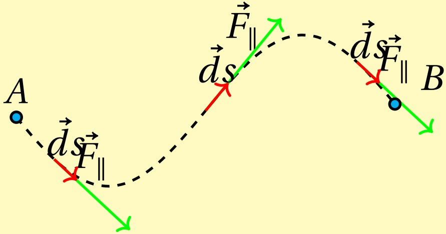
Il lavoro per andare dal punto A al punto B è il prodotto scalare della forza per lo spostamento.



$$L_{AB} = \vec{F} \cdot \vec{AB} = F \cdot AB \cdot \cos\gamma = \vec{F}_{\parallel} \cdot \vec{AB}$$

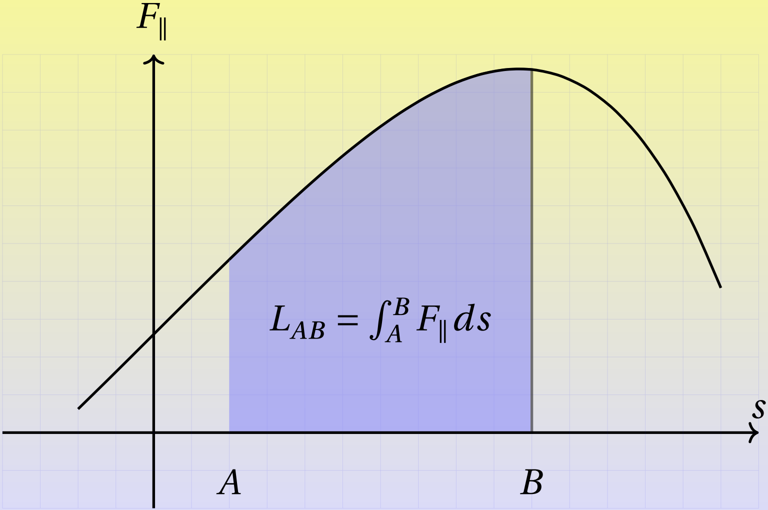
Lavoro (caso generale)

Il lavoro per andare dal punto A al punto B:



$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Se grafichiamo $F_{\parallel}$ in funzione di s:



Energia

L'energia è la capacità di compiere un lavoro.

Esistono diverse forme di energia. Di seguito ci occuperemo dell'energia legata alla velocità (cinetica) e di quella legata alla posizione (potenziale).
L'unità di misura del lavoro e dell'energia è il Joule (J).

Se si compie un lavoro su un corpo se ne può variare la velocità.

Energia cinetica (K)

$$\Delta K = K_B - K_A = L_{AB}$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m v^2}$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

Possiamo giustificare la definizione di energia cinetica ipotizzando di applicare al corpo una forza costante che ne faccia variare la velocità, in questo caso l'oggetto si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato:

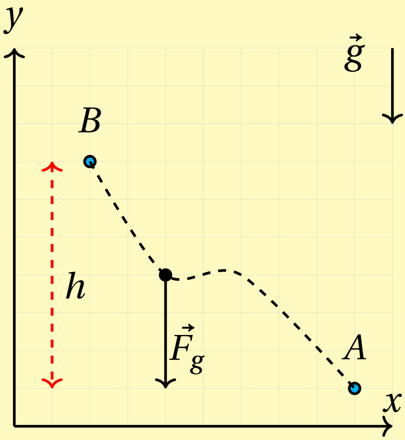
$$\Delta K = F\Delta s = ma\Delta s = ma\left(\frac{1}{2}a\Delta t^2 + v_A\Delta t\right) =$$

$$= m\left(\frac{1}{2}(a\Delta t)^2 + v_A a\Delta t\right) = m\left(\frac{1}{2}(v_B - v_A)^2 + v_A(v_B - v_A)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

L'equazione che definisce la funzione di stato energia cinetica è sempre valida (nell'ambito della fisica classica). Per le energie legate alla posizione abbiamo invece differenti espressioni a seconda delle differenti situazioni analizzate. Per ora vedremo nel dettaglio l'energia potenziale legata all'altezza rispetto alla superficie terrestre in prossimità della stessa (energia potenziale gravitazionale) e quella legata all'allungamento di una molla (energia potenziale elastica). **In generale si ha che la variazione di energia potenziale sia** $\Delta U = U_B - U_A = -L_{AB}$**.**

Energia potenziale gravitazionale



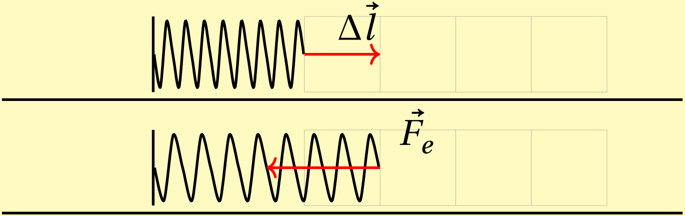
$$\Delta U = U_B - U_A = -L_{AB} =$$

$$= -\int_A^B \vec{F}_g d\vec{s} =$$

$$= mg\,(y_B - y_A) = mg\,h$$

$$\boxed{U = mgy}$$

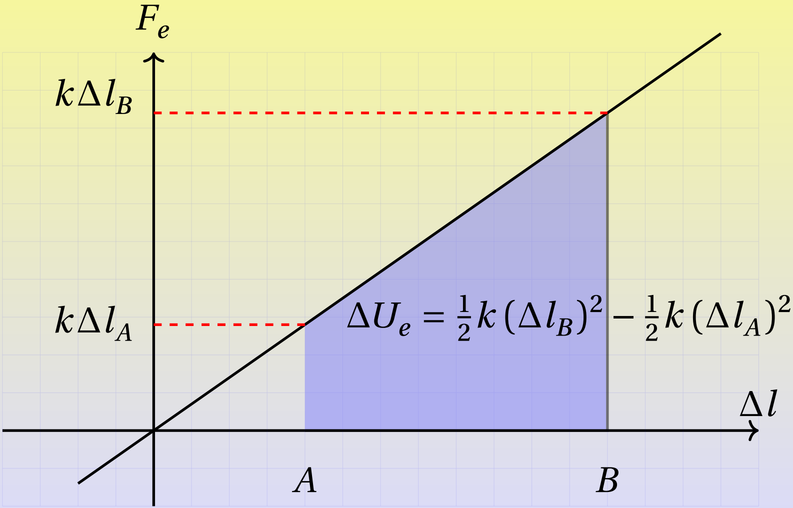
Energia potenziale elastica



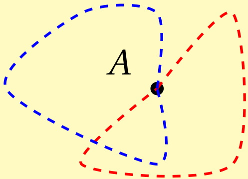
$$\Delta U_e = U_{eB} - U_{eA} = -\int_A^B \vec{F}_e d\vec{l} = \frac{1}{2}k\,(\Delta l_B)^2 - \frac{1}{2}k\,(\Delta l_A)^2$$

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2}k\,(\Delta l)^2}$$

Grafichiamo F_e in funzione di Δl:



Forze conservative



Una forza si dice conservativa se il lavoro della forza lungo qualsiasi percorso chiuso da A ad A stesso vale 0.

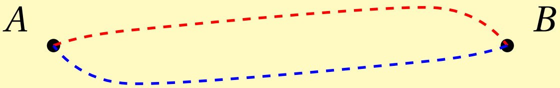
Quasi tutte le forze fisiche di cui ci occupiamo sono conservative con alcune eccezioni significative. Gli attriti, ad esempio, sono tipiche forze non conservative, il lavoro delle forze d'attrito dipende dal percorso effettuato ed, in generale, è non nullo lungo un percorso chiuso.

Energia meccanica e sua conservazione

L'energia meccanica è la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale. In un sistema in cui agiscano solo forze conservative l'energia meccanica si conserva. Si ha:

$$L_{AB} + L_{BA} = 0 \rightarrow L_{AB} - L_{AB} = 0 \rightarrow \Delta K + \Delta U = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow K_B - K_A + U_B - U_A = 0 \rightarrow \boxed{K_A + U_A = K_B + U_B}$$



Energia meccanica e forze non conservative

Se in un sistema agiscono anche forze non conservative l'energia meccanica varia. In particolare si ha:

$$\Delta E = L_{\text{forze non conservative}} \rightarrow \Delta K + \Delta U = L_{\text{forze non conservative}} \rightarrow$$

$$\rightarrow K_B - K_A + U_B - U_A = L_{\text{forze non conservative}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{E_B - E_A = L_{\text{forze non conservative}}}$$

Potenza

La potenza è il lavoro nell'unità di tempo:

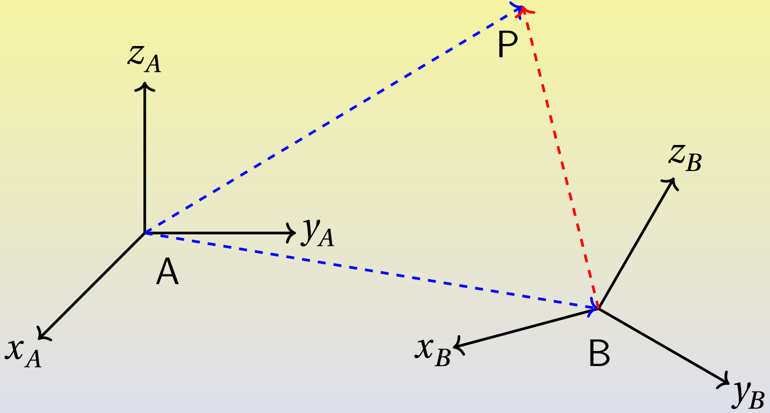
$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{F}\,d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

L'unità di misura della potenza è il Watt (W).

Moti relativi

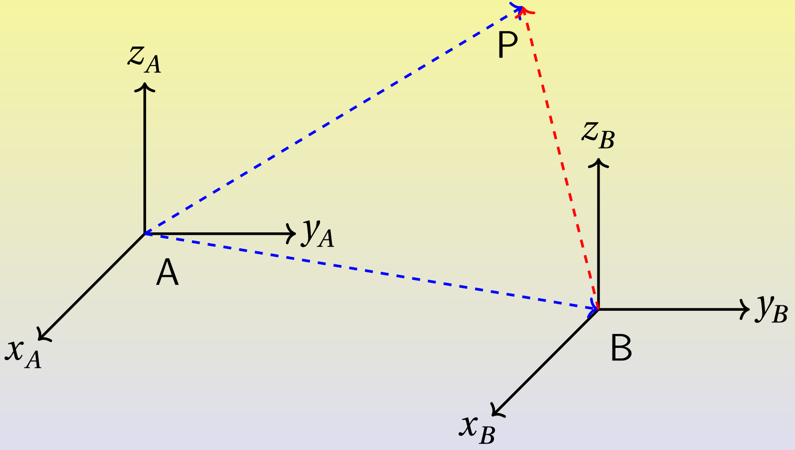
Osservatori differenti descrivono con le stesse modalità la medesima situazione fisica?
Come descrivono le situazioni fisiche gli osservatori non inerziali?
Per gli osservatori non inerziali valgono i principi della dinamica?
Vediamo come due osservatori A e B descrivono il medesimo punto P tramite i loro rispettivi sistemi di riferimento.

Le posizioni (caso generale): $\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP}$

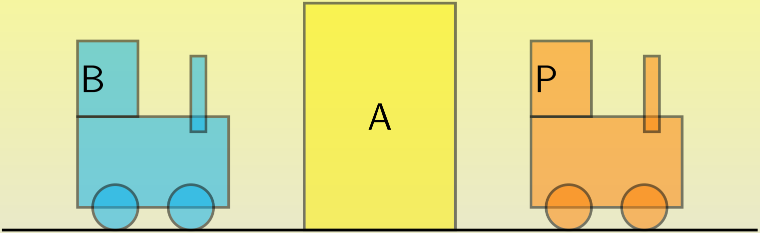


Moti relativi

Le velocità (solo traslazione): $\vec{v}_{AP} = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BP}$



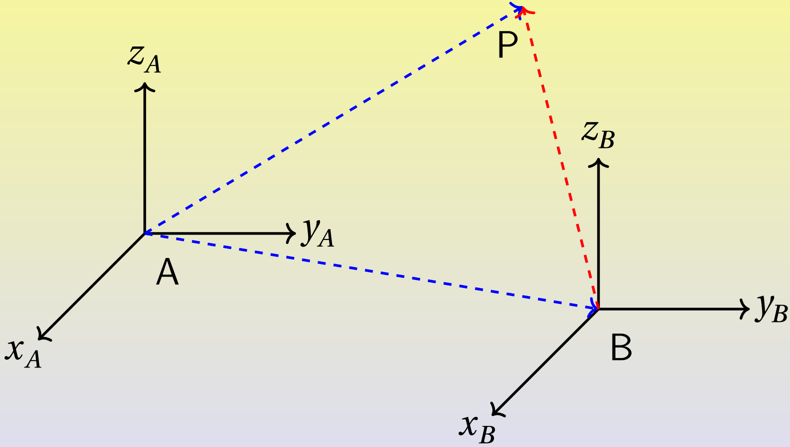
Moti relativi



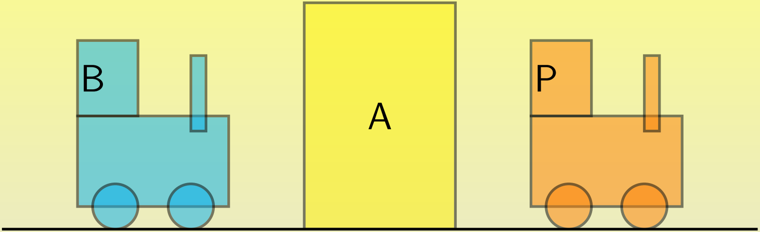
Sia l'osservatore A che l'osservatore B descrivono la situazione di P. A e B attribuiranno a P velocità differenti ma questa non è una contraddizione.

Moti relativi

L'accelerazione (solo traslazione): $\vec{a}_{AP} = \vec{a}_{AB} + \vec{a}_{BP}$



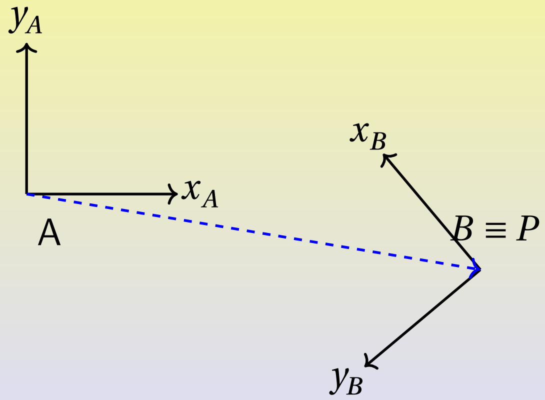
Moti relativi



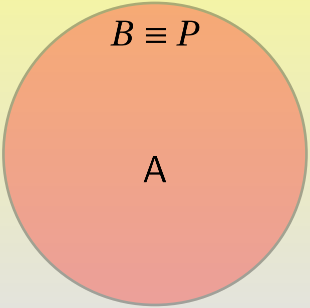
Sia l'osservatore A che l'osservatore B descrivono la situazione di P. A e B attribuiranno a P accelerazioni differenti ma questa non è una contraddizione. Se B è un osservatore non inerziale, descriverà accelerazioni (e conseguentemente forze) apparenti agenti su P.

Moti relativi

Le velocità (solo rotazione): $\vec{v}_{AP} = \vec{v}_{AB} = \vec{\omega} \times \vec{AB}$; $\vec{v}_{BP} = \vec{0}$



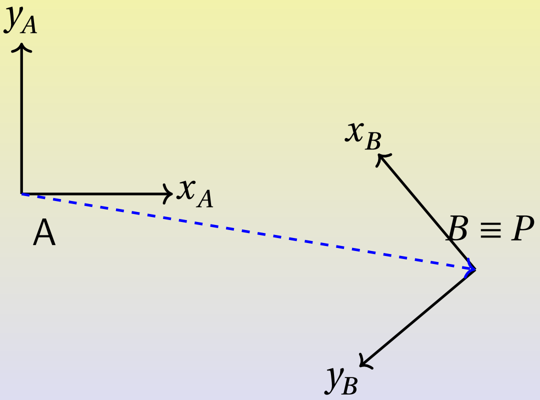
Moti relativi



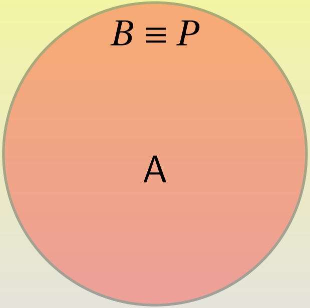
L'osservatore A descrive il moto di P come un moto circolare, la velocità di P (secondo A) continua a cambiare direzione ed eventualmente verso e modulo. Secondo l'osservatore B, P è fermo.

Moti relativi

L'accelerazione (solo rotazione, $\vec{\omega}$ costante):
$\vec{a}_{AP} = \vec{a}_{AB} = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{AB}\right)$; $\vec{a}_{BP} = \vec{0}$



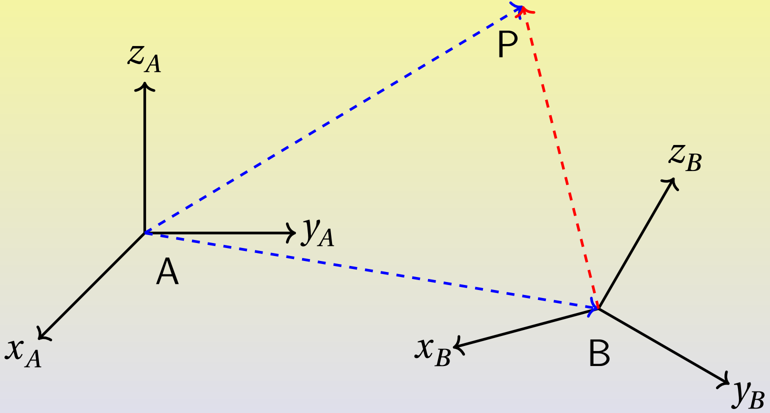
Moti relativi



L'osservatore A descrive il moto di P come un moto circolare, l'accelerazione di P (secondo A) è di tipo centripeto. Secondo l'osservatore B, P è fermo.

Moti relativi

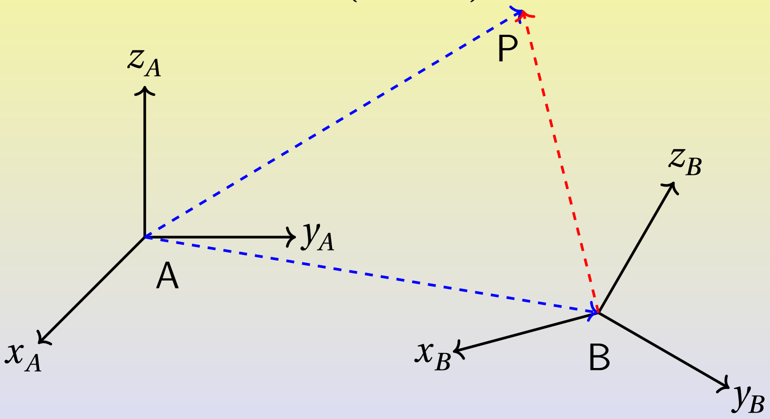
Le velocità (caso generale): $\vec{v}_{AP} = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BP} + \vec{\omega} \times \vec{BP}$



Moti relativi

L'accelerazione (caso generale):

$$\vec{a}_{AP} = \vec{a}_{AB} + \vec{a}_{BP} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{BP} \right) + \vec{\alpha} \times \vec{BP} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{BP}$$



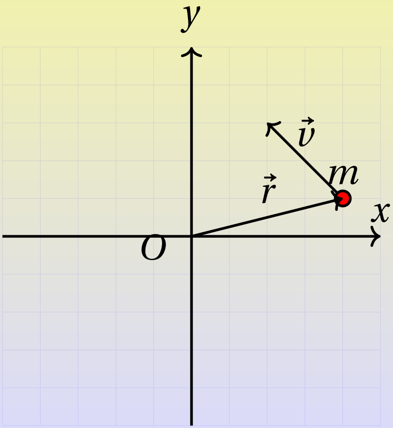
Forze e sistemi inerziali (osservatore A) e non inerziali (osservatore B):

Per A vale il secondo principio della dinamica: $\vec{F} = m\vec{a}_{AP}$ ma per B non può valere altrettanto ($\vec{F} = m\vec{a}_{BP}$) altrimenti i due osservatori misurando accelerazioni differenti dovrebbero giustificare il medesimo fenomeno con forze reali differenti. Si ha che $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}_{AP}} \rightarrow \vec{F} = m\left(\vec{a}_{AB} + \vec{a}_{BP} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{BP}\right) + \vec{\alpha} \times \vec{BP} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{BP}\right) \rightarrow \vec{F} - m\left(\vec{a}_{AB} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{BP}\right) + \vec{\alpha} \times \vec{BP} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{BP}\right) = m\vec{a}_{BP} \rightarrow \boxed{\vec{F} + \vec{F}_{\text{apparenti}} = m\vec{a}_{BP}}$

Moti relativi

Le trasformazioni di posizioni, velocità e accelerazioni viste si dicono Galileiane e sono valide nell'ipotesi che sia l'osservatore A che l'osservatore B abbiano a disposizione il medesimo cronometro per la misura dei tempi e il medesimo metro per la misura delle lunghezze. Ogni osservatore possiede i suoi strumenti di misura e non è detto che questi funzionino esattamente allo stesso modo in tutte le situazioni ma questo sarà oggetto della teoria della relatività speciale e della teoria della relatività generale formulate da Albert Einstein.

Il momento angolare (rispetto all'origine di una particella che si muove nel piano xy)



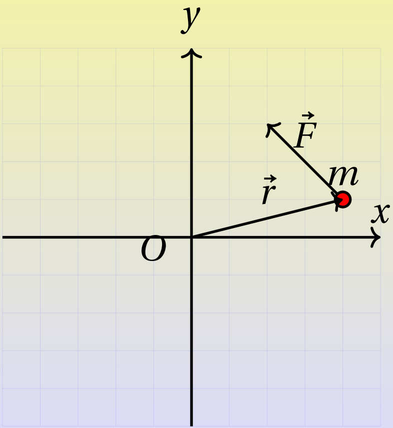
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{pmatrix};\ \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v} =$$

$$= m \cdot \vec{r} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) = \underbrace{mr^2}_{I}\vec{\omega}$$

I è il momento d'inerzia di m.

Il momento delle forze (rispetto all'origine di una particella che si muove nel piano xy)



$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{m\vec{r} \times d\vec{v}}{dt}$$

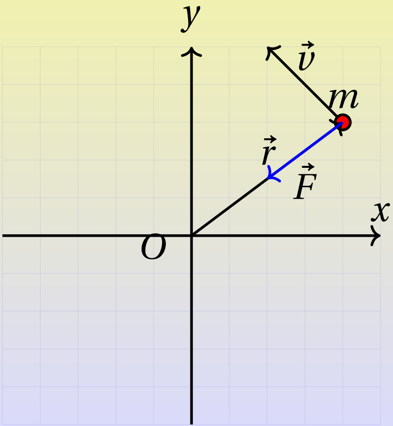
$$= m \cdot \vec{r} \times \vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}$$

ma anche

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{mr^2 d\vec{\omega}}{dt}$$

$$= mr^2 \cdot \vec{\alpha} = I \cdot \vec{\alpha}$$

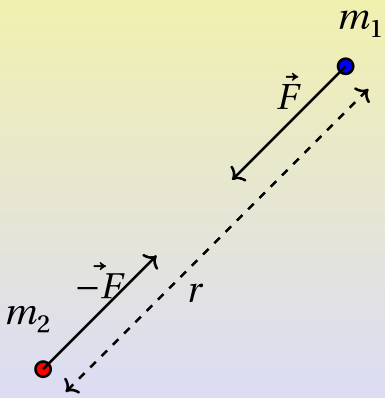
Conservazione del momento angolare (rispetto all'origine di una particella che si muove nel piano xy)



$$\vec{M} = \vec{0} \leftrightarrow \vec{L} = costante$$

In particolare per le forze centrali: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$ perché $\vec{r} \parallel \vec{F}$.

La legge della gravitazione universale di Newton



Due masse puntiformi m_1 e m_2 si attraggono con una forza di modulo

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

direzione lungo la congiungente le due masse e verso attrattivo.

Massa inerziale e massa gravitazionale

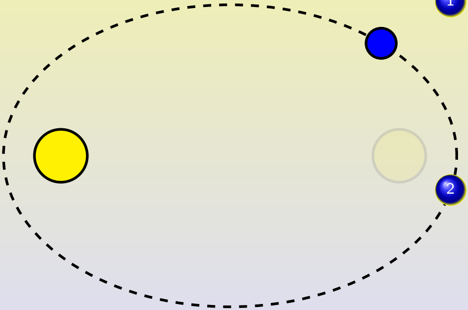
$$F = G\frac{m_{1g} m_{2g}}{r^2}$$

$$m_{1i} \cdot a = G\frac{m_{1g} m_{2g}}{r^2}$$

$$a = G\frac{m_{1g}}{m_{1i}}\frac{m_{2g}}{r^2}$$

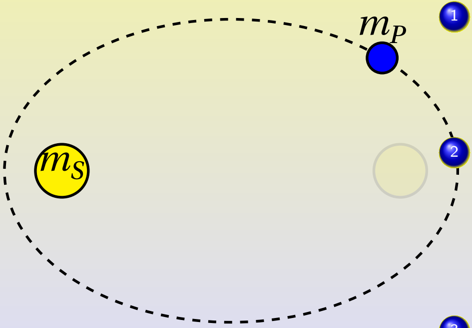
Le verifiche sperimentali mostrano che $\frac{m_{1g}}{m_{1i}} = 1$, per questo non faremo differenza tra massa inerziale e massa gravitazionale.

Moto dei pianeti attorno al Sole (leggi sperimentali di Keplero basate sulle osservazioni di Tycho Brahe)



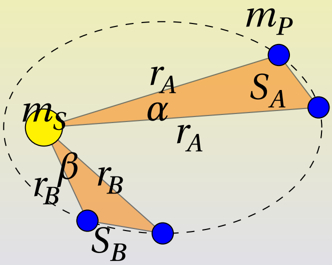
1. I pianeti seguono orbite ellittiche con il Sole in uno dei due fuochi dell'ellisse
2. I pianeti mantengono una velocità areolare costante
3. $T = k\sqrt{r^3}$

Moto dei pianeti attorno al Sole (in conseguenza della legge di gravitazione universale di Newton)



1. I pianeti seguono orbite, almeno in prima istanza, ellittiche
2. La forza gravitazionale è una forza centrale quindi si conserva il momento angolare
3. $T = \frac{2\pi}{\sqrt{G \cdot m_S}} \cdot \sqrt{r^3}$

Seconda legge di Keplero dalla legge di Newton



$$\frac{dS_A}{dt} = \frac{dS_B}{dt}$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}r_A^2\alpha\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}r_B^2\beta\right)}{dt}$$

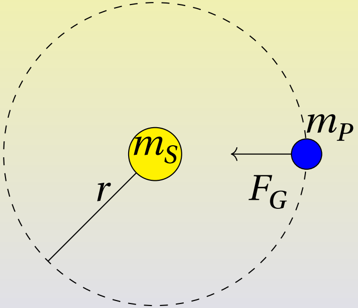
$$\frac{1}{2}r_A^2\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2}r_B^2\frac{d\beta}{dt}$$

$$r_A^2\omega_A = r_B^2\omega_B$$

$$m_P r_A^2\omega_A = m_P r_B^2\omega_B$$

$$L_A = L_B$$

Terza legge di Keplero dalla legge di Newton



$$F_G = m_P \omega^2 r$$

$$G\frac{m_P m_S}{r^2} = m_P \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{G \cdot m_S}} \cdot \sqrt{r^3}$$

Campo gravitazionale

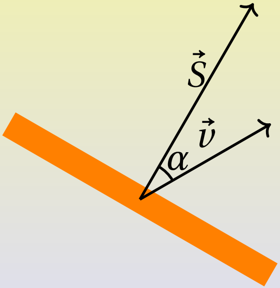
Una massa M modifica le caratteristiche dello spazio ad essa circostante, in modo tale che, una eventuale seconda massa m risenta una forza di attrazione gravitazionale:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$

nel caso di una massa M puntiforme si ha:

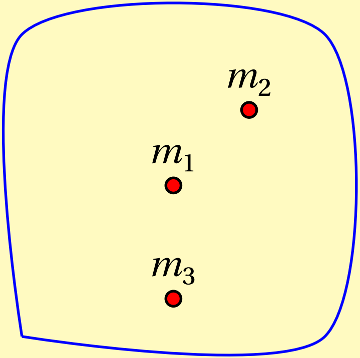
$$g = G\frac{M}{r^2}$$

Definizione di flusso di un campo vettoriale (caso superficie piana e campo uniforme)



$$\Phi_S(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{S} = v \cdot S \cdot \cos\alpha$$

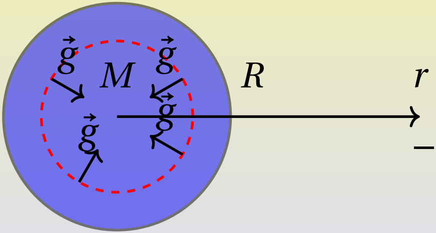
Teorema di Gauss sul flusso del campo gravitazionale



Il flusso del campo $\vec{g}$ di una qualsiasi distribuzione di massa attraverso una qualsiasi superficie chiusa dipende solo dalla massa interna alla superficie e vale:

$$\Phi_S(\vec{g}) = -4\pi G \sum_i m_i$$

Applicazione del teorema di Gauss: campo $\vec{g}$ generato da una sfera di densità costante ρ (1)



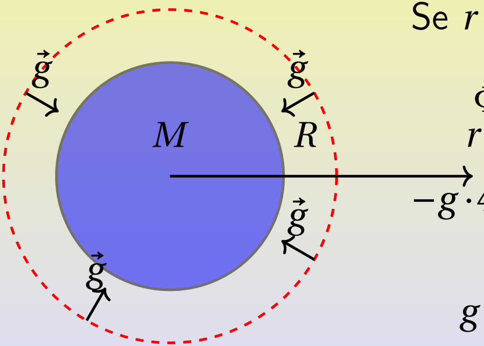
Se $r < R$ allora:

$$\Phi_{\text{definizione}} = \Phi_{\text{Gauss}}$$

$$-g \cdot 4\pi r^2 = -4\pi G \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho$$

$$g = \frac{4}{3}\pi G \rho r$$

Applicazione del teorema di Gauss: campo $\vec{g}$ generato da una sfera di densità costante ρ (2)



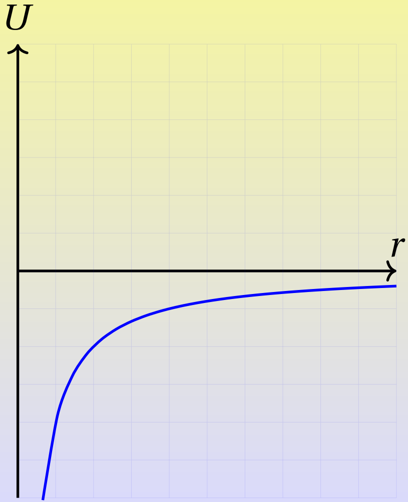
Se $r > R$ allora:

$$\Phi_{\text{definizione}} = \Phi_{\text{Gauss}}$$

$$-g \cdot 4\pi r^2 = -4\pi G \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho$$

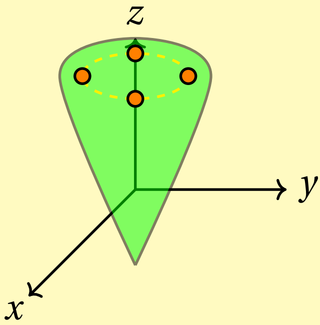
$$g = G \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{r^2} = G \frac{M}{r^2}$$

Energia potenziale gravitazionale per due masse puntiformi



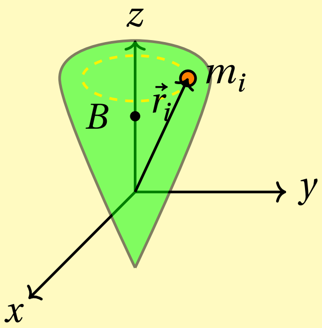
$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

Corpo rigido (eventualmente rotante attorno asse z)



Un corpo rigido può essere modellizzato come N masse puntiformi che mantengono posizioni reciproche costanti nel tempo.

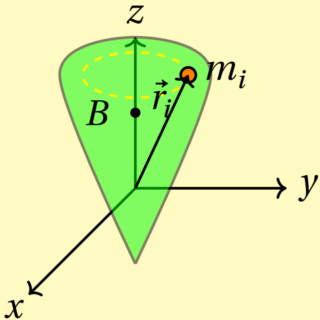
Baricentro di un corpo rigido



$$\vec{B} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i}{M}$$

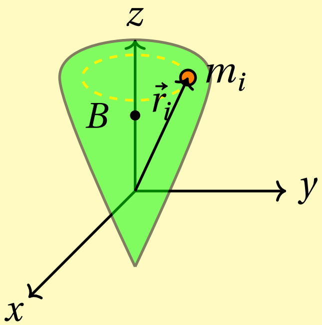
Baricentro di un corpo rigido e quantità di moto



$$\vec{v}_B = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v}_i}{M}$$

$$M\vec{v}_B = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

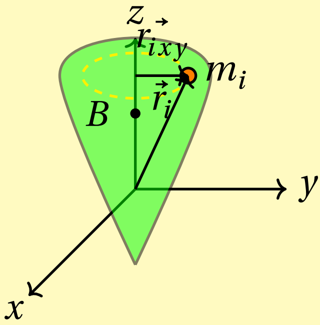
Baricentro di un corpo rigido e risultante delle forze



$$\vec{a}_B = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{a}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{a}_i}{M}$$

$$M\vec{a}_B = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Momento angolare (rotazione attorno asse z, baricentro su asse z)



$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i =$$

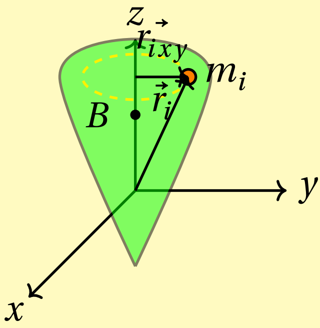
$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_{ixy}^2 \vec{\omega} =$$

$$= \vec{\omega} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_{ixy}^2 = I\vec{\omega}$$

Momento delle forze (rotazione attorno asse z, baricentro su asse z)



$$\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i =$$

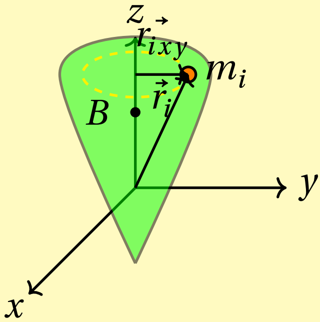
$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \left(\vec{\alpha} \times \vec{r}_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_{ixy}^2 \vec{\alpha} =$$

$$= \vec{\alpha} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_{ixy}^2 = I\vec{\alpha}$$

Corpo rigido e conservazione del momento angolare (rotazione attorno asse z)

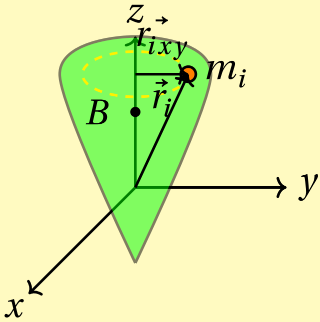


$$\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \vec{0} \leftrightarrow$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \text{costante}$$

Corpo rigido ed energia cinetica di rotazione (rotazione attorno asse z)

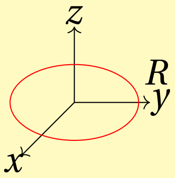
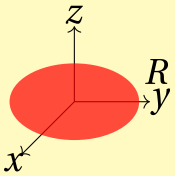


$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 =$$

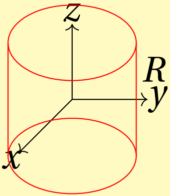
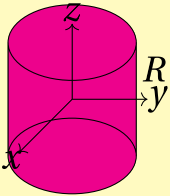
$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i r_{ixy}^2 \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} I \omega^2$$

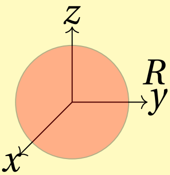
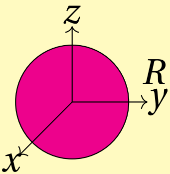
Alcuni momenti d'inerzia rispetto all'asse z

Descrizione	I
	Anello: $I = MR^2$
	Disco: $I = \frac{1}{2}MR^2$

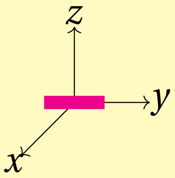
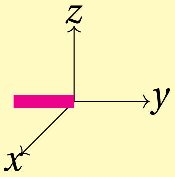
Alcuni momenti d'inerzia rispetto all'asse z

Descrizione	I
	Guscio cilindrico sottile: $I = MR^2$
	Cilindro pieno: $I = \frac{1}{2}MR^2$

Alcuni momenti d'inerzia rispetto all'asse z

Descrizione	I
	Sfera cava sottile: $I = \frac{2}{3}MR^2$
	Sfera piena: $I = \frac{2}{5}MR^2$

Alcuni momenti d'inerzia rispetto all'asse z

Descrizione	I
	Asta sottile: $I = \frac{1}{12} ML^2$
	Asta sottile: $I = \frac{1}{3} ML^2$

Rotazione e traslazione dei corpi rigidi

In generale un corpo rigido può traslare e ruotare.
Ne descriviamo il comportamento traslatorio riferendoci al baricentro del corpo, alla sua velocità e accelerazione.
Ne descriviamo la rotazione rispetto un sistema di riferimento con asse z parallelo all'asse di rotazione.

Gas ideali

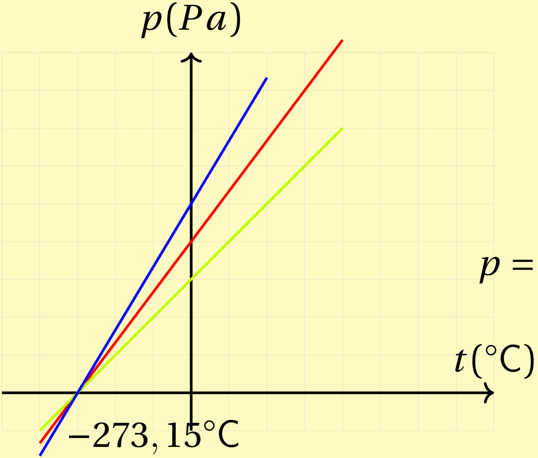
Gas ideale

Un gas ideale è un gas:

- costituito da molecole uguali
- le cui molecole si muovono in modo casuale
- per il quale gli urti tra molecole e tra molecole e pareti del contenitore sono elastici
- le cui molecole non interagiscono tra loro, se non durante gli urti.

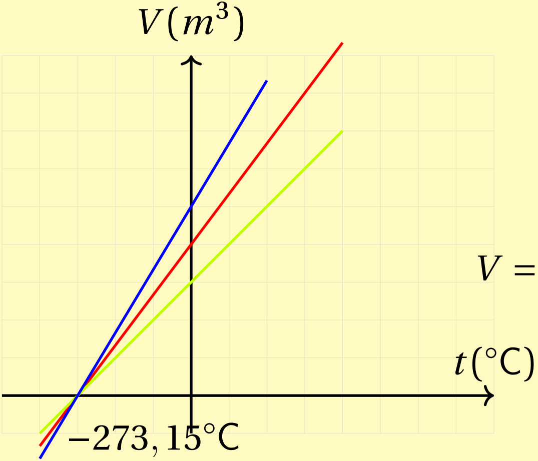
Studiamo le grandezze macroscopiche dei gas (pressione, volume e temperatura) per ottenere informazioni sulle grandezze microscopiche (massa, velocità).

Legge sperimentale di Gay-Lussac ($V = cost$)



$$p = p_0 + \frac{p_0}{273,15}t$$

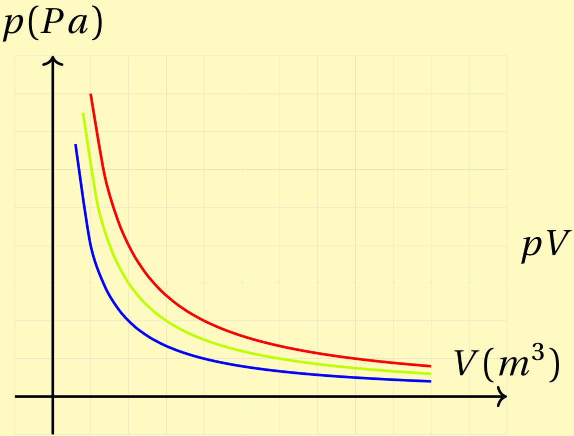
Legge sperimentale di Charles ($p = cost$)



$$V = V_0 + \frac{V_0}{273,15} t$$

Legge di Boyle

Legge sperimentale di Boyle ($t = cost$)



$$pV = p_iV_i$$

Legge di Avogadro

Legge di Avogadro

In 22,4 litri di gas, anche diversi, alla pressione di 1 atmosfera e alla temperatura di 0°C è presente una mole di molecole di gas.

mole e numero di Avogadro

Una mole è un numero di Avogadro, $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$, di entità elementari.

Legge dei gas perfetti

Dalle leggi sperimentali si ricava:

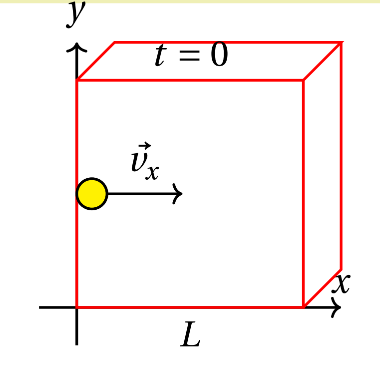
- l'esistenza di una temperatura minima raggiungibile dai gas che è -273,15°C=0 K
- l'equazione di stato dei gas perfetti: $\boxed{\text{pV=nRT}}$

L'equazione di stato dei gas perfetti sintetizza e puntualizza le leggi di Charles, Boyle, Gay-Lussac e Avogadro in un'unica espressione matematica nella quale n è il numero di moli del gas, p è la pressione in Pa, V è il volume in m^3, R è una costante detta dei gas e T è la temperatura in gradi Kelvin.

Teoria cinetica dei gas ideali monoatomici:

Le molecole di gas in monoatomico possono essere assimilate a punti materiali elastici liberi di muoversi. In un certo volume di gas le velocità delle particelle saranno, in generale, tra loro differenti e dalla complessa distribuzione. Per ora ci accontentiamo di studiare il comportamento medio delle molecole di gas. Di seguito si farà riferimento alla velocità delle particelle intendendo con questa la loro velocità media.

Una molecola con velocità lungo asse x v_x e massa m in un contenitore cubico di lato L.

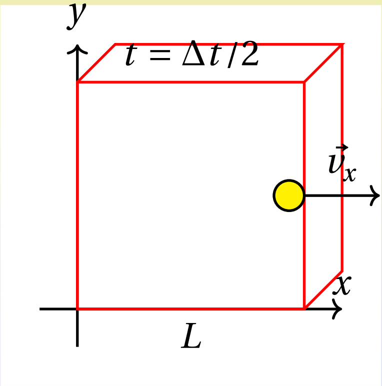


$$p = \frac{F_x}{L^2} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{2mv_x}{L^2} =$$

$$= \frac{v_x}{2L} \cdot \frac{2mv_x}{L^2} = \frac{mv_x^2}{L^3} \longrightarrow$$

$$pV = mv_x^2$$

Una molecola con velocità lungo asse x v_x e massa m in un contenitore cubico di lato L.

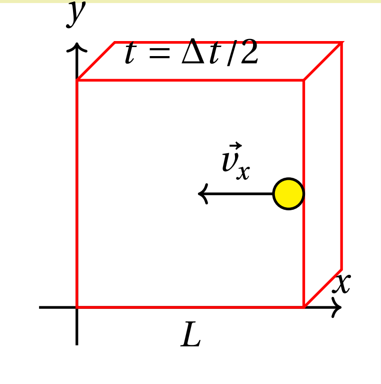


$$p = \frac{F_x}{L^2} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{2mv_x}{L^2} =$$

$$= \frac{v_x}{2L} \cdot \frac{2mv_x}{L^2} = \frac{mv_x^2}{L^3} \longrightarrow$$

$$pV = mv_x^2$$

Una molecola con velocità lungo asse x v_x e massa m in un contenitore cubico di lato L.

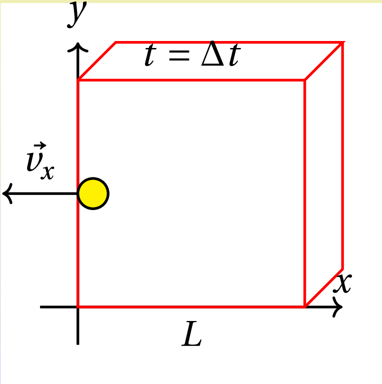


$$p = \frac{F_x}{L^2} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{2mv_x}{L^2} =$$

$$= \frac{v_x}{2L} \cdot \frac{2mv_x}{L^2} = \frac{mv_x^2}{L^3} \longrightarrow$$

$$pV = mv_x^2$$

Una molecola con velocità lungo asse x v_x e massa m in un contenitore cubico di lato L.

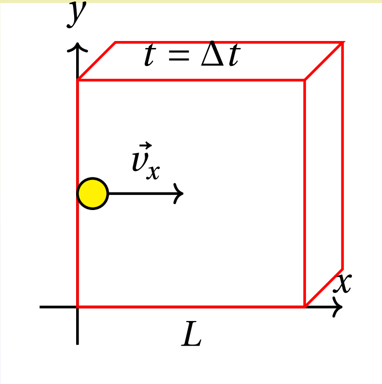


$$p = \frac{F_x}{L^2} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{2mv_x}{L^2} =$$

$$= \frac{v_x}{2L} \cdot \frac{2mv_x}{L^2} = \frac{mv_x^2}{L^3} \longrightarrow$$

$$pV = mv_x^2$$

Una molecola con velocità lungo asse x v_x e massa m in un contenitore cubico di lato L.

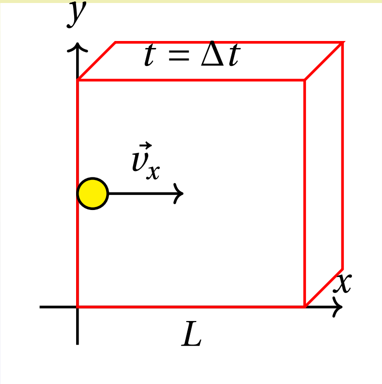


$$p = \frac{F_x}{L^2} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{2mv_x}{L^2} =$$

$$= \frac{v_x}{2L} \cdot \frac{2mv_x}{L^2} = \frac{mv_x^2}{L^3} \longrightarrow$$

$$pV = mv_x^2$$

Una molecola con velocità lungo asse x v_x e massa m in un contenitore cubico di lato L.



$$p = \frac{F_x}{L^2} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{2mv_x}{L^2} =$$

$$= \frac{v_x}{2L} \cdot \frac{2mv_x}{L^2} = \frac{mv_x^2}{L^3} \longrightarrow$$

$$pV = mv_x^2$$

Gas in un certo volume

Possiamo generalizzare l'equazione $pV = mv_x^2$:

- se N è il numero delle molecole: $pV = Nmv_x^2$
- essendo le velocità delle molecole distribuite in modo casuale lungo le tre direzioni cartesiane si avrà $v_x = v_y = v_z$
- ricordando il prodotto scalare e la sua definizione algebrica $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 3v_x^2$

in definitiva si ha:

$$pV = \frac{Nmv^2}{3}$$

Teoria cinetica e equazione dei gas perfetti:

$$pV = \frac{Nmv^2}{3} = \frac{n \cdot N_A \cdot mv^2}{3} = \frac{2}{3} nN_A \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = nRT$$

esaminando gli ultimi due membri dell'uguaglianza precedente si ottiene:

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} k_B T$$

la velocità media di una molecola di gas è legata alla temperatura assoluta dalla relazione:

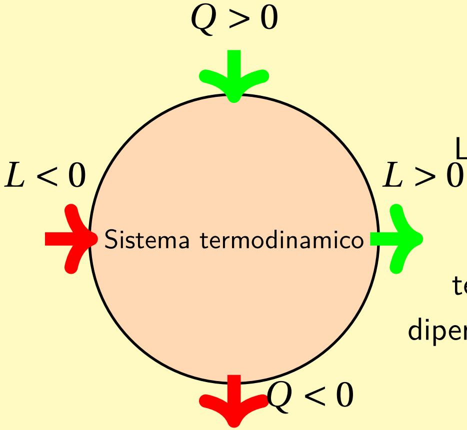
$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

Velocità e velocità media

Le velocità delle particelle di gas sono tutte diverse. La velocità media è una tra le velocità ma non è l'unica. Maxwell dimostrò che la probabilità di trovare una particella con velocità tra una v_{min} e una v_{max} è data da:

$$P(v_{min} < v < v_{max}) = \int_{v_{min}}^{v_{max}} 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv$$

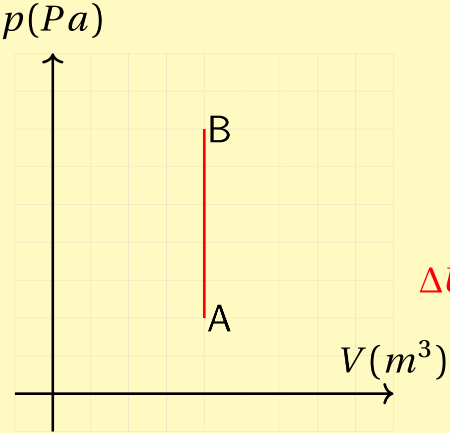
Primo principio della termodinamica



$$\Delta U = Q - L$$

L'energia interna (U) di un sistema termodinamico è funzione dello stato termodinamico del sistema, dipende cioè solo da pressione, volume e temperatura del sistema.

Primo principio e trasformazioni isocore dei gas

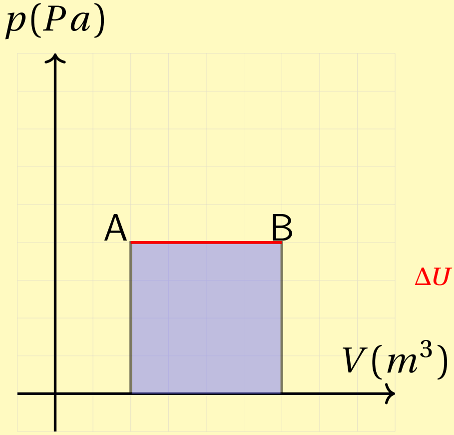


$$V = cost$$

$$\Delta U = Q - L$$

$$\Delta U = nC_V\left(T_B - T_A\right) - 0$$

Primo principio e trasformazioni isobare dei gas

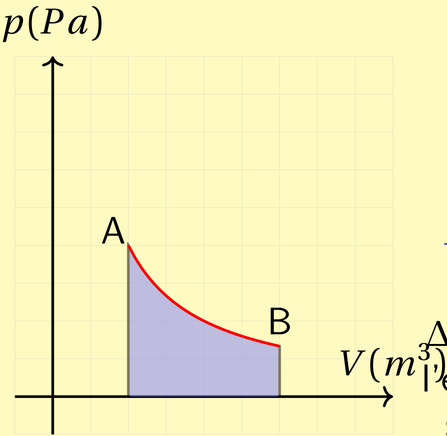


$$p = cost$$

$$\Delta U = Q - L$$

$$\Delta U = nC_p(T_B - T_A) - p(V_B - V_A)$$

Primo principio e trasformazioni isoterme dei gas



$$pV = cost$$

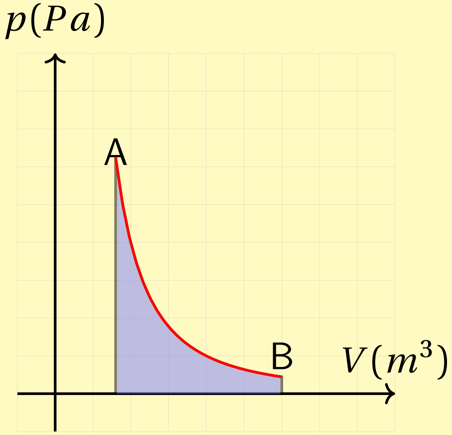
$$\Delta U = Q - L$$

$$0 = Q - L$$

$$L_{AB} = nRT \cdot \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

$\Delta U = 0$ perché per i gas l'energia interna dipende solo dalla temperatura.

Primo principio e trasformazioni adiabatiche dei gas



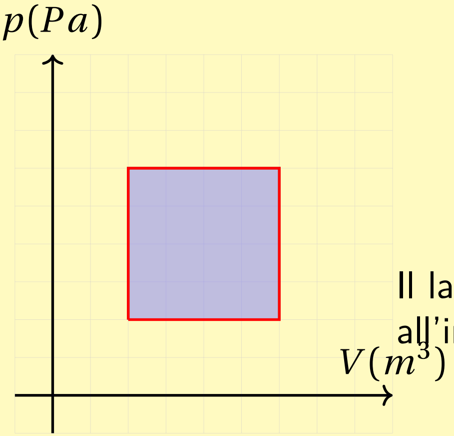
$$pV^{\gamma} = cost$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

$$\Delta U = Q - L$$

$$\Delta U = 0 - L$$

Primo principio e cicli dei gas



$$\Delta U = Q - L$$

$$0 = Q - L$$

Il lavoro è l'area all'interno del ciclo.

Per i gas monoatomici valgono le relazioni:

Calore specifico a volume costante

$$\Delta U = nC_V\Delta T \rightarrow \frac{3}{2}Rn\Delta T = nC_V\Delta T \rightarrow C_V = \frac{3}{2}R$$

Relazione (di Mayer) tra calori specifici e determinazione di C_p

$$\Delta U = nC_p\Delta T - p\Delta V \rightarrow nC_V\Delta T = nC_p\Delta T - nR\Delta T \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{C_V = C_p - R} \rightarrow C_p = \frac{5}{2}R$$

Secondo principio della termodinamica: enunciato di Clausius

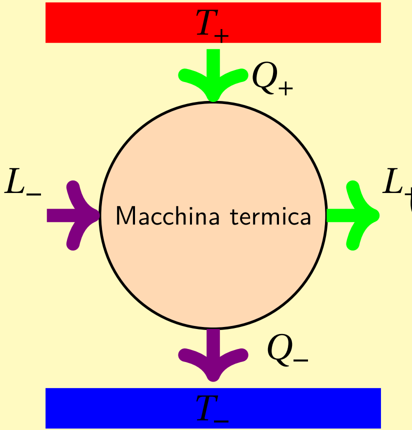
É impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia il passaggio di calore da un corpo a temperatura più bassa ad uno a temperatura più alta.

Secondo principio della termodinamica: enunciato di Kelvin

É impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia la trasformazione in lavoro di calore tratto da un'unica sorgente a temperatura uniforme.

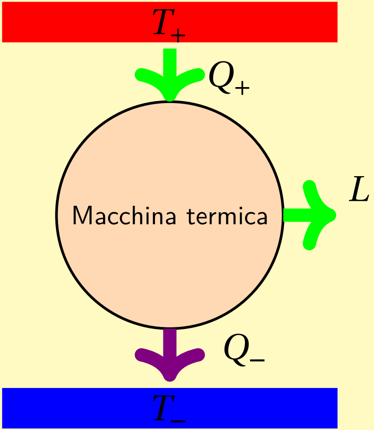
L'impossibilità espressa dai principi va letta in senso statistico come una eventualità estremamente improbabile.

Macchine termiche



Una macchina termica è un dispositivo fisico o teorico in grado di scambiare calore (assorbirne o cederne) e lavoro (produrne o subirne) con l'ambiente circostante. Per poter funzionare in modo continuo le macchine termiche devono essere cicliche.

Rendimento macchine termiche

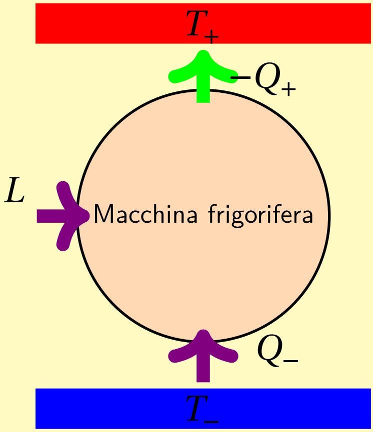


In una macchina termica ciclica ($\Delta U = 0$) che produca lavoro meccanico scambiando calore con l'ambiente esterno il rendimento è:

$$\eta = \frac{L}{Q_+} =$$

$$= \frac{Q_+ - |Q_-|}{Q_+} = 1 - \frac{|Q_-|}{Q_+}$$

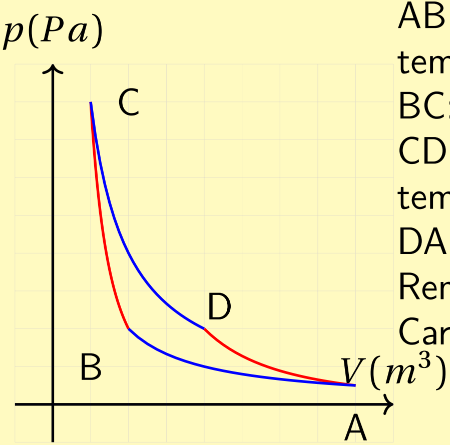
Coefficiente di prestazione di una macchina frigorifera



In una macchina frigorifera ciclica ($\Delta U = 0$) che pompi calore da una sorgente a temperatura più bassa verso una sorgente a temperatura più alta utilizzando lavoro meccanico il coefficiente di prestazione è:

$$\varepsilon = \frac{Q_-}{L}$$

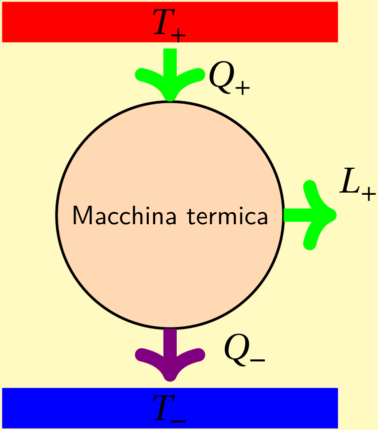
Ciclo di Carnot



AB: isoterma a temperatura T_-
BC: adiabatica
CD: isoterma a temperatura T_+
DA: adiabatica
Rendimento del ciclo di Carnot:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_-}{T_+}$$

Rendimento massimo macchine termiche: teorema di Carnot



Il rendimento di una macchina termica che lavori tra una temperatura massima T_+ e una minima T_- è sempre inferiore o uguale al rendimento di un ciclo di Carnot tra le medesime temperature:

$$\eta \leq \eta_C = 1 - \frac{T_-}{T_+}$$

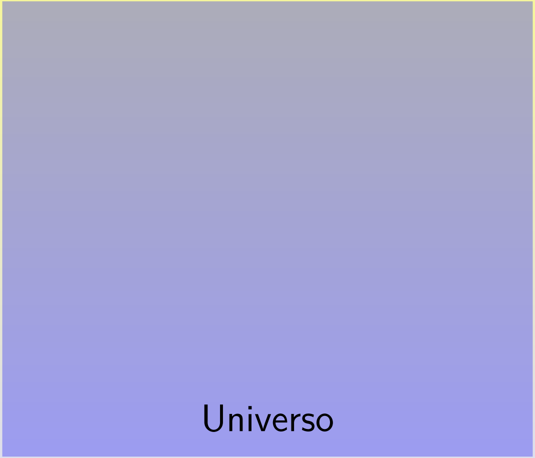
Trasformazioni reversibili

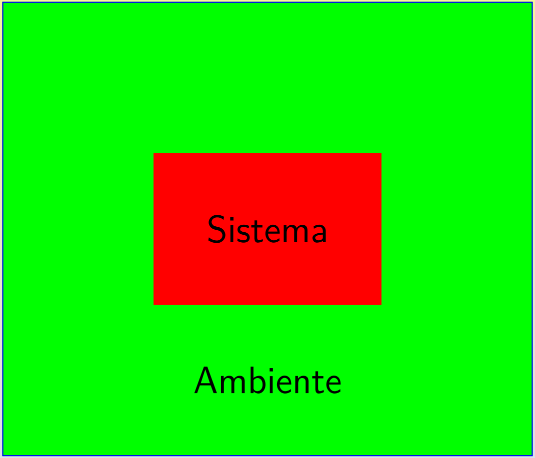
Una trasformazione è detta reversibile se in ogni istante è possibile definire in modo univoco pressione, volume e temperatura di tutto il sistema termodinamico, affinché ciò avvenga la trasformazione deve avvenire in tempi molto lunghi.

Entropia e la sua variazione

L'entropia (S) è una funzione di stato la cui variazione è data da:

$$dS = \frac{dQ}{T}$$


Universo


Sistema
Ambiente

Entropia dell'universo e trasformazioni reversibili

A seguito di una trasformazione reversibile l'entropia dell'universo rimane costante: $dS_U = 0$.

Entropia dell'universo e trasformazioni irreversibili

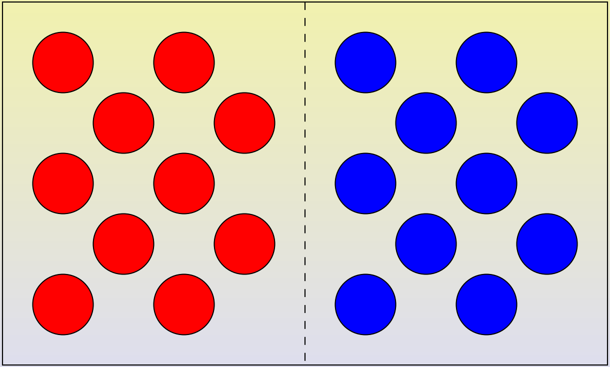
A seguito di una trasformazione irreversibile l'entropia dell'universo aumenta: $dS_U > 0$.

Secondo principio della termodinamica: formulazione entropica

É impossibile realizzare una trasformazione termodinamica che faccia diminuire l'entropia dell'universo. In termini matematici: $dS_U \geq 0$.

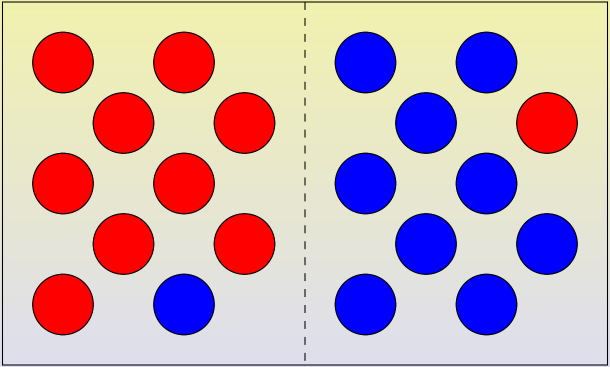
Da situazioni meno probabili a più probabili

$$T_S >> T_D$$



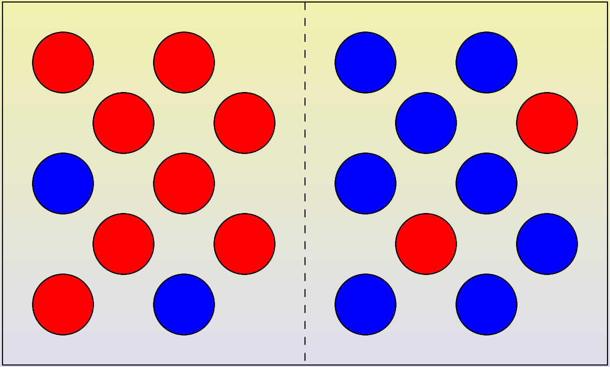
Da situazioni meno probabili a più probabili

$$T_S >> T_D$$



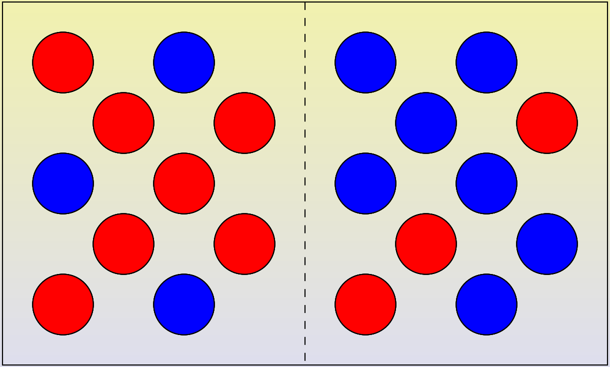
Da situazioni meno probabili a più probabili

$$T_S > T_D$$



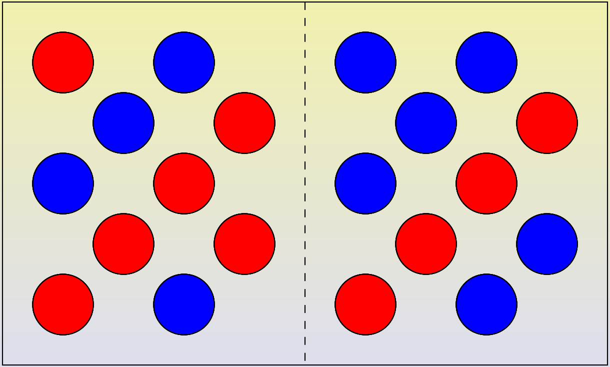
Da situazioni meno probabili a più probabili

$T_S > T_D$



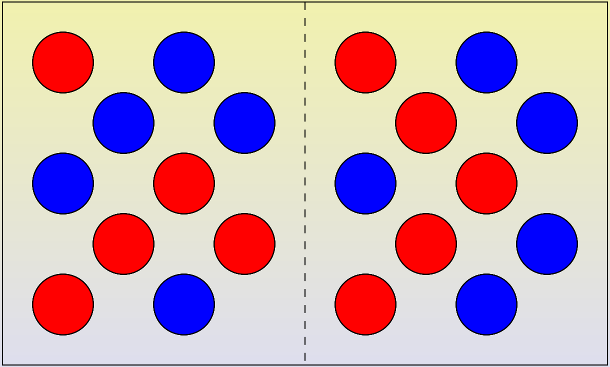
Da situazioni meno probabili a più probabili

$T_S > T_D$



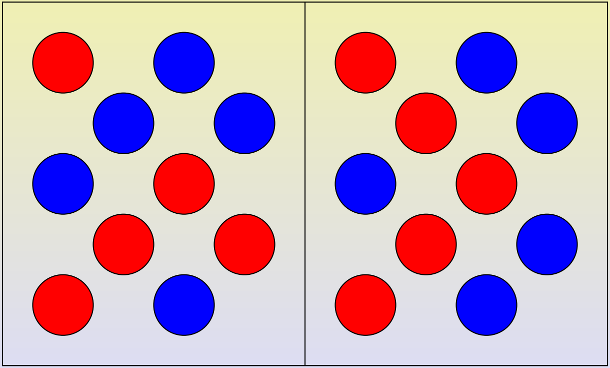
Da situazioni meno probabili a più probabili

$$T_S = T_D$$



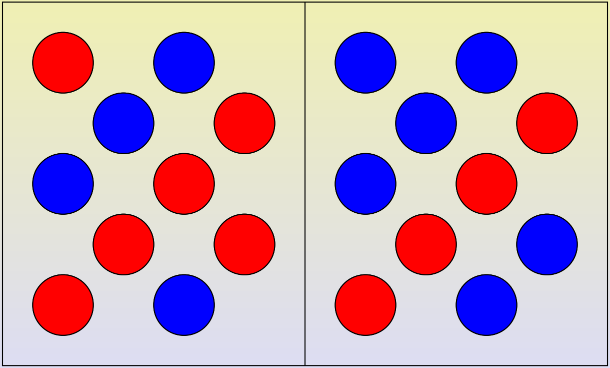
Diavoletto di Maxwell, da situazioni più probabili a meno probabili

$$T_S = T_D$$



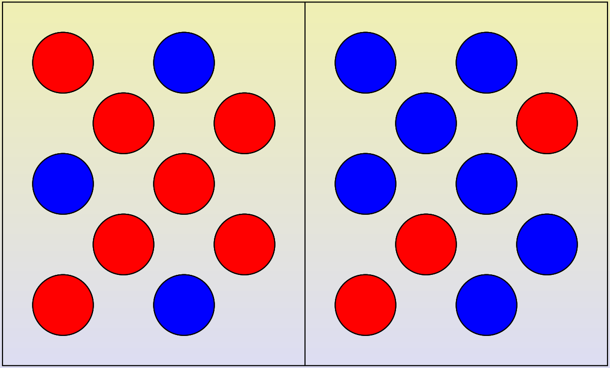
Diavoletto di Maxwell, da situazioni più probabili a meno probabili

$$T_S > T_D$$



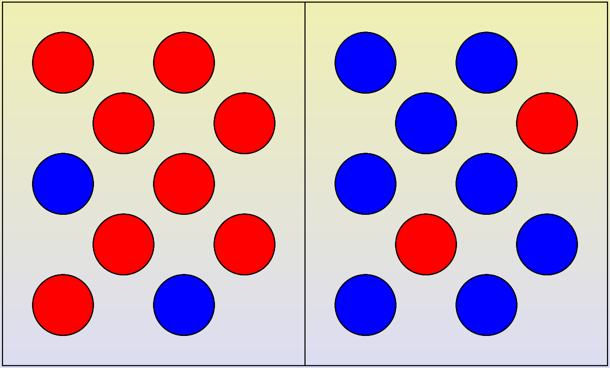
Diavoletto di Maxwell, da situazioni più probabili a meno probabili

$$T_S > T_D$$



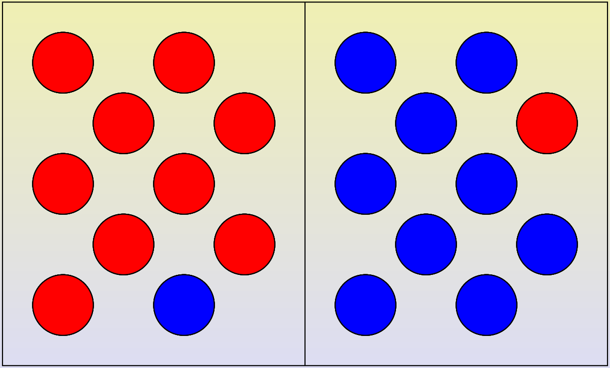
Diavoletto di Maxwell, da situazioni più probabili a meno probabili

$$T_S >> T_D$$



Diavoletto di Maxwell, da situazioni più probabili a meno probabili

$$T_S >> T_D$$



Diavoletto di Maxwell, da situazioni più probabili a meno probabili

$$T_S >> T_D$$