

# Matematica

## Appunti di Matematica 3

Michele prof. Perini

ISS Copernico Pasoli - Liceo Scientifico

A.S. 2024-2025

1

## Funzioni

- Generalità
- Grafico
- Pari e dispari
- Monotone
- Composte e inverse
- Grafici

2

## Successioni

- Monotone
- Definizioni ricorsive
- Principio di induzione
- Progressione aritmetica
- Progressione geometrica

3

## Vettori 2D e piano cartesiano

- Definizione
- Modulo
- Scalare per vettore
- Somma
- Prodotto scalare
- Rette
- Determinanti
- Distanza punto-retta
- Fasci di rette

4

## Introduzione alle trasformazioni lineari

- Simmetria centrale
- Simmetria assiale
- Traslazione
- Dilatazioni

- Omotetie
- Grafici

5

## Goniometria

- Angoli
- Funzioni goniometriche
- Angoli associati
- Triangoli rettangoli
- Grafici funzioni goniometriche
- Funzioni periodiche
- Funzioni goniometriche inverse
- Equazioni e disequazioni
- Formule di addizione e sottrazione
- Formule di duplicazione
- Formule di bisezione

- Formule parametriche
- Funzione lineare in seno e coseno
- Esercizi: formule di prostaferesi e di Werner

6

## Coniche

- Circonferenza
- Ellisse
- Parabola
- Iperbole
- Coniche senza il termine  $xy$
- Sezioni di cono

7

## Trigonometria

- Triangoli rettangoli
- Area di un triangolo
- Teorema della corda e dei seni

- Teorema del coseno
- Coseno e prodotto scalare

## 8

### Statistica

- Sommatorie
- Dati e loro rappresentazione
- Frequenze assolute
- Frequenze relative
- Frequenze cumulate
- Frequenze relative cumulate
- La media aritmetica
- La varianza
- La deviazione standard
- Test del chi quadro di Cramer
- Regressione lineare

Le funzioni sono particolari relazioni.

Una relazione  $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$  è una funzione se:

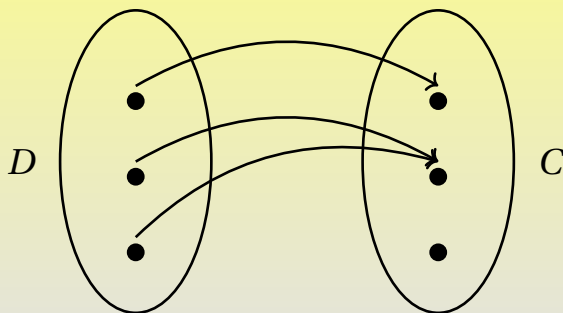
$$\forall x \in X, \forall y_1, y_2 \in Y, x\mathcal{R}y_1 \wedge x\mathcal{R}y_2 \Leftrightarrow y_1 = y_2$$

Notazione per una funzione:

$$y = f(x) : X \rightarrow Y$$

- l'insieme  $X$  si chiama anche dominio,  $D$
- l'insieme  $Y$  si chiama codominio,  $C$
- L'insieme  $I = \{y \in C : y = f(x), x \in D\}$  si chiama immagine. In generale  $I \subseteq C$ .

Rappresentazione sagittale di una funzione  $f(x) : D \rightarrow C$



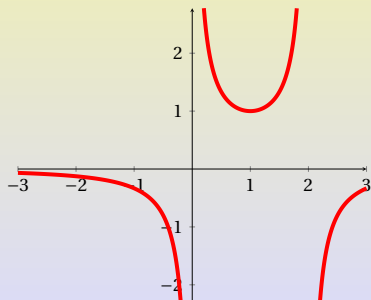
una funzione è un collegamento, una regola tra elementi dell'insieme dominio,  $D$ , e elementi dell'insieme codominio,  $C$ , che abbina ad ogni elemento  $x \in D$  uno e uno solo elemento  $y \in C$ .



## Grafico di una funzione

Data la funzione  $f(x) : D \rightarrow C$  si chiama grafico di  $f$  l'insieme delle coppie ordinate:

$$G = \{(x, f(x)) : x \in D\}$$



## Funzioni uguali

Due funzioni  $f$  e  $g$  sono uguali se hanno lo stesso dominio  $D$  e inoltre:

$$f(x) = g(x), \forall x \in D$$

## Funzioni pari<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>Il nome di queste funzioni deriva dal fatto che la proprietà che le definisce è tipica delle funzioni polinomiali che presentano solo potenze pari della variabile indipendente.

Una funzione  $f(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$  si dice pari se

$$f(-x) = f(x), \forall x \in D$$

le funzioni pari sono simmetriche rispetto all'asse  $y$ .

## Funzioni dispari<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>Il nome di queste funzioni deriva dal fatto che la proprietà che le definisce è tipica delle funzioni polinomiali che presentano solo potenze dispari della variabile indipendente.

Una funzione  $f(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$  si dice dispari se

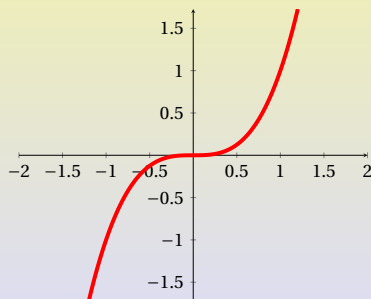
$$f(-x) = -f(x), \forall x \in D$$

le funzioni dispari sono simmetriche rispetto all'origine.

## Funzioni strettamente crescenti

$f : D \rightarrow C$  è strettamente crescente in  $I \subset D$  se:

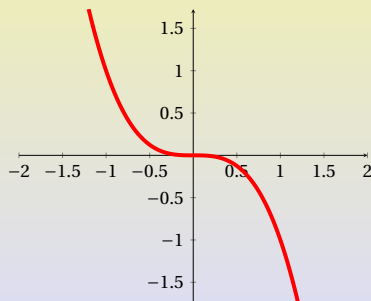
$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I$$



## Funzioni strettamente decrescenti

$f : D \rightarrow C$  è strettamente decrescente in  $I \subset D$  se:

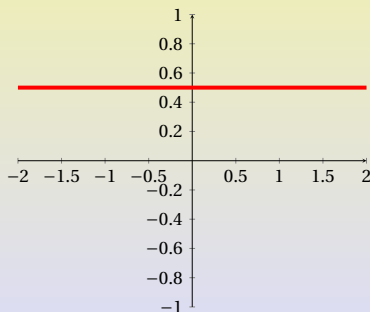
$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I$$



## Funzioni costanti

$f : D \rightarrow C$  è costante in  $I \subset D$  se:

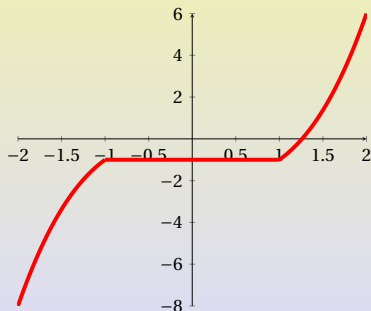
$$f(x_1) = f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I$$



## Funzioni crescenti

$f : D \rightarrow C$  è crescente in  $I \subset D$  se:

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I$$

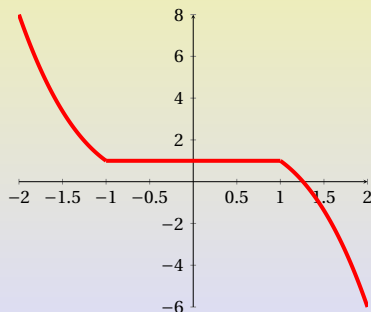




## Funzioni decrescenti

$f : D \rightarrow C$  è decrescente in  $I \subset D$  se:

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I$$



## Funzioni monotone

Una funzione crescente o decrescente in un certo sottoinsieme  $I$  del suo dominio si dice monotona in  $I$ .

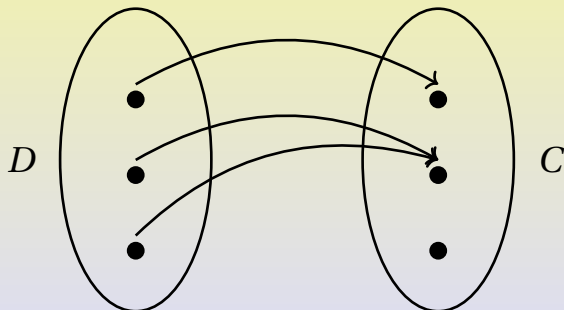
Una funzione  $y = f(x) : D \rightarrow C$  può essere (o non essere):

**suriettiva**  $C = I = \{y \in C : y = f(x), x \in D\}$

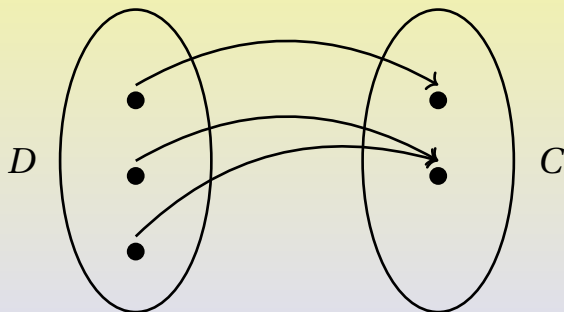
**iniettiva**  $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

**biiettiva** se è sia suriettiva che iniettiva

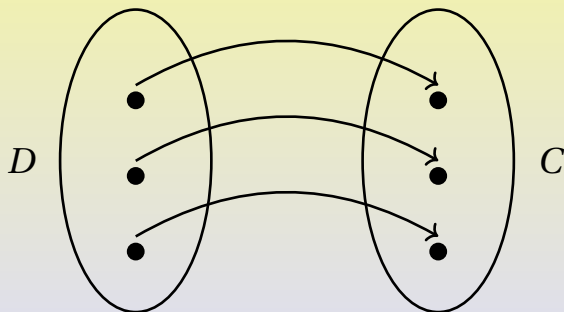
Rappresentazione sagittale di una funzione  $f(x) : D \rightarrow C$  non suriettiva, non iniettiva, non biiettiva:



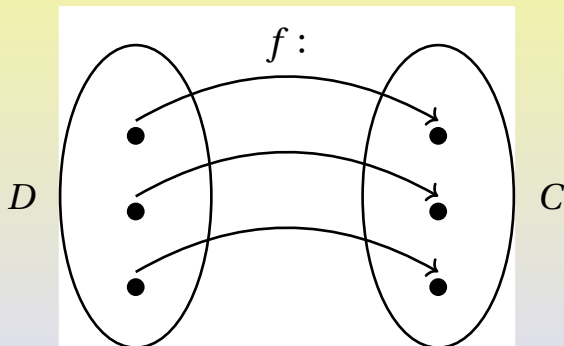
Rappresentazione sagittale di una funzione  $f(x) : D \rightarrow C$  suriettiva, non iniettiva, non biiettiva:



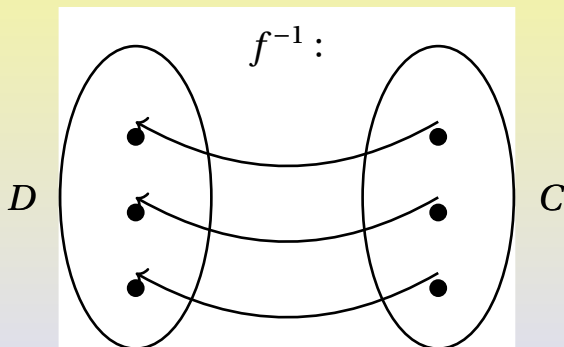
Rappresentazione sagittale di una funzione  $f(x) : D \rightarrow C$  suriettiva, iniettiva, biiettiva:



Le funzioni biettive ammettono inversa. L'inversa di una funzione  $f(x)$  si indica con il simbolo  $f^{-1}(x)$ .

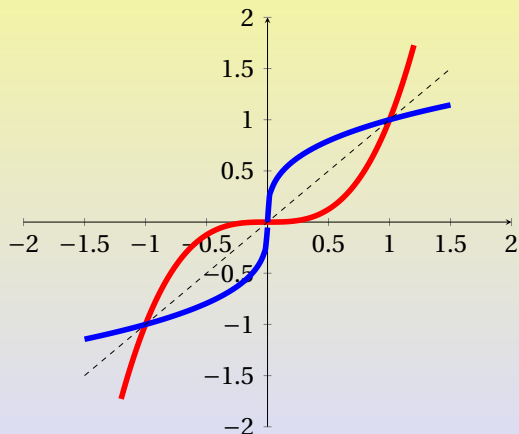


Le funzioni biettive ammettono inversa. L'inversa di una funzione  $f(x)$  si indica con il simbolo  $f^{-1}(x)$ .





I grafici delle funzioni inverse sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.



## Funzioni composte

Date due funzioni  $f$  e  $g$ , si dice funzione composta di  $f$  dopo  $g$ , e si indica con il simbolo  $f \circ g$  la funzione:

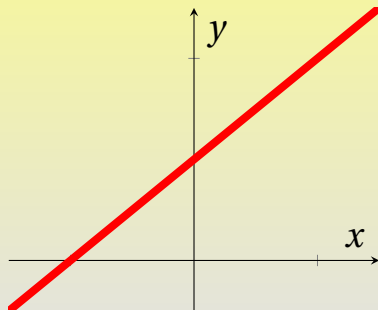
$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

in generale  $f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$ .

## Composizione di funzioni inverse

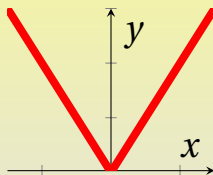
Date due funzioni  $f$  e  $f^{-1}$ , una inversa dell'altra si ha che  $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x$  o con altri simboli  $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ .

$$y = f(x) = x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$



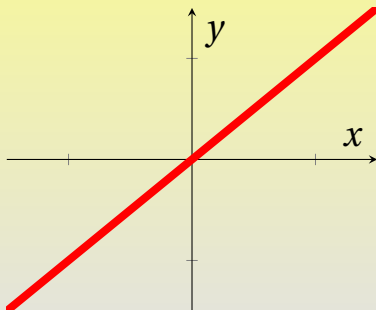
La funzione  $f(x) = x + c$  è iniettiva e monotona crescente  $\forall c \in \mathbb{R}$ , può essere applicata ad ambo i membri di equazioni, disequazioni e disuguaglianze non modificando il loro insieme delle soluzioni.

$$y = f(x) = |x|$$



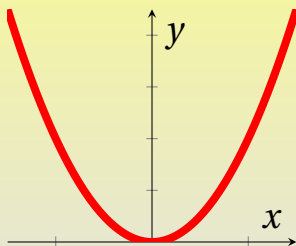
La funzione  $f(x) = |x|$  è non iniettiva e non monotona crescente su tutto  $\mathbb{R}$ , può essere applicata ad ambo i membri di equazioni, disequazioni e disuguaglianze non modificando il loro insieme delle soluzioni se i membri sono entrambi positivi.

$$y = f(x) = kx, \quad k \in \mathbb{R}_0$$



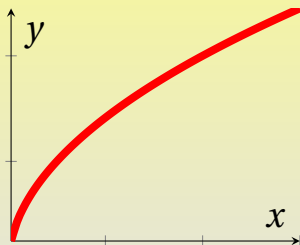
La funzione  $f(x) = kx$ ,  $k \in \mathbb{R}_0$  è iniettiva e monotona su tutto  $\mathbb{R}$ , può essere applicata ad ambo i membri di equazioni, disequazioni e disuguaglianze non modificando il loro insieme delle soluzioni.

$$y = f(x) = x^{2n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$



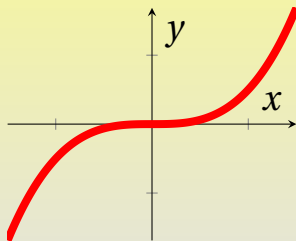
La funzione  $f(x) = x^{2n}$  è non iniettiva e non monotona su tutto  $\mathbb{R}$ , può essere applicata ad ambo i membri di equazioni, disequazioni e disuguaglianze non modificando il loro insieme delle soluzioni se i membri sono entrambi positivi.

$$y = f(x) = \sqrt[2n]{x}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$



La funzione  $f(x) = \sqrt[2n]{x}$  è iniettiva e monotona crescente su tutto  $\mathbb{R}^+$ , può essere applicata ad ambo i membri di equazioni, disequazioni e disuguaglianze non modificando il loro insieme delle soluzioni solo se i membri sono positivi.

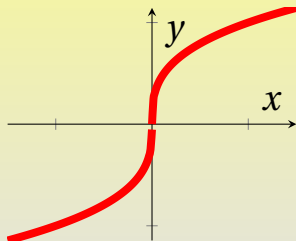
$$y = f(x) = x^{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$



La funzione  $f(x) = x^{2n+1}$  è iniettiva monotona crescente su tutto  $\mathbb{R}$ , può essere applicata ad ambo i membri di equazioni, disequazioni e disuguaglianze non modificando il loro insieme delle soluzioni.



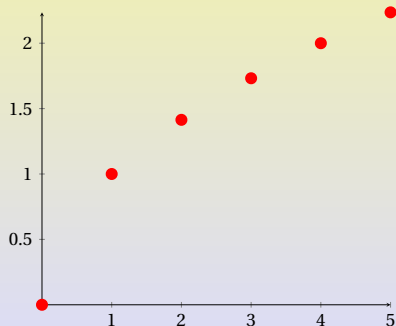
$$y = f(x) = \sqrt[2n+1]{x}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$



La funzione  $f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$  è iniettiva e monotona crescente su tutto  $\mathbb{R}$ , può essere applicata ad ambo i membri di equazioni, disequazioni e disuguaglianze non modificando il loro insieme delle soluzioni.

## Successione

Una successione è una funzione  $s(n) : D \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .  
I termini di una successione si indicano con i simboli  $s(n)$  o semplicemente  $s_n$ .



## Monotonia delle successioni

Una successione  $s(n) : D \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice:

strettamente crescente se  $s_n < s_{n+1} \quad \forall n \in D$

strettamente decrescente se  $s_n > s_{n+1} \quad \forall n \in D$

costante se  $s_n = s_{n+1} \quad \forall n \in D$

crescente se  $s_n \leq s_{n+1} \quad \forall n \in D$

decrescente se  $s_n \geq s_{n+1} \quad \forall n \in D$

**Definizione ricorsiva: potenza ad esponente naturale**

Con  $a \in \mathbb{R}_0$  e  $n \in \mathbb{N}$ :

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ a \cdot a^{n-1} & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

Esempio:

$$2^4 = 2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^0 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 16$$

**Definizione ricorsiva: fattoriale**

Con  $n \in \mathbb{N}$ :

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

Esempio:

$$4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$$

## Principio di induzione

Con  $n \in \mathbb{N}$  e  $\mathcal{P}(n)$  una proprietà. Se  $\mathcal{P}(0)$  è vera e  $\forall n \in \mathbb{N} \mathcal{P}(n) \rightarrow \mathcal{P}(n+1)$  allora  $\mathcal{P}(n)$  vale per tutti gli  $n \in \mathbb{N}$ .

Il principio di induzione permette di dimostrare proprietà generali in modo estremamente semplice.

**Definizione ricorsiva: progressione aritmetica**

Con  $n \in \mathbb{N}$  e  $d \in \mathbb{R}$ :

$$a_n = \begin{cases} a_0 & \text{se } n = 0 \\ d + a_{n-1} & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

Esempio:

$$a_n = \begin{cases} 3 & \text{se } n = 0 \\ 2 + a_{n-1} & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

$$a_3 = 2 + a_2 = 2 + 2 + a_1 = 2 + 2 + 2 + a_0 = 2 + 2 + 2 + 3 = 9$$

## Progressione aritmetica: formula generale dimostrata per induzione

Se  $a_n$  è una progressione aritmetica di ragione  $d$  si ha che  $a_n = a_0 + nd$ . Per dimostrare la proprietà  $a_n = a_0 + nd$  usiamo il principio di induzione:

- $a_0 = a_0 + 0 \cdot d = a_0$  la proprietà è verificata per  $n = 0$
- $a_{n+1} = a_n + d = a_0 + nd + d = a_0 + (n + 1)d = a_{n+1}$ , per tutti i naturali se la proprietà  $a_n = a_0 + nd$  è vera per  $n$  allora è vera anche per  $n + 1$

**Quindi la proprietà  $a_n = a_0 + nd$  è valida**

$\forall n \in \mathbb{N}$ .



## Somma termini progressione aritmetica: dimostrazione per induzione

Se  $a_n$  è una progressione aritmetica di ragione  $d$  si ha che  $s_n = \sum_{i=0}^n a_i = (n+1)a_0 + \frac{n(n+1)}{2}d$ . Per dimostrare la proprietà usiamo il principio di induzione:

- $s_0 = \sum_{i=0}^0 a_i = (0+1)a_0 + \frac{0(0+1)}{2}d = a_0$  la proprietà è verificata per  $n=0$
- $s_{n+1} = a_{n+1} + s_n = a_0 + (n+1)d + (n+1)a_0 + \frac{n(n+1)}{2}d = (n+2)a_0 + \frac{n^2+3n+2}{2}d = (n+2)a_0 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}d = s_{n+1}$ , per tutti i naturali se la proprietà è vera per  $n$  allora è vera anche per  $n+1$

**Quindi la proprietà  $s_n = (n+1)a_0 + \frac{n(n+1)}{2}d$  è valida**

$\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Definizione ricorsiva: progressione geometrica**

Con  $n \in \mathbb{N}$  e  $q \in \mathbb{R}_0$ :

$$a_n = \begin{cases} a_0 & \text{se } n = 0 \\ q \cdot a_{n-1} & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

Esempio:

$$a_n = \begin{cases} 3 & \text{se } n = 0 \\ 2 \cdot a_{n-1} & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 = 2 \cdot 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a_0 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

## Progressione geometrica: formula generale dimostrata per induzione

Se  $a_n$  è una progressione geometrica di ragione  $q$  si ha che  $a_n = a_0 q^n$ . Per dimostrare la proprietà  $a_n = a_0 q^n$  usiamo il principio di induzione:

- $a_0 = a_0 q^0 = a_0$  la proprietà è verificata per  $n = 0$
- $a_{n+1} = q \cdot a_n = q \cdot a_0 q^n = a_0 q^{n+1} = a_{n+1}$ , per tutti i naturali se la proprietà  $a_n = a_0 q^n$  è vera per  $n$  allora è vera anche per  $n + 1$

**Quindi la proprietà  $a_n = a_0 q^n$  è valida  $\forall n \in \mathbb{N}$ .**

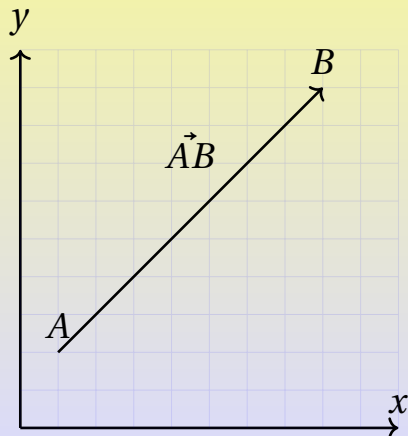
## Somma termini progressione geometrica: dimostrazione per induzione

Se  $a_n$  è una progressione geometrica di ragione  $q \neq 1$  si ha che  $s_n = \sum_{i=0}^n a_i = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ . Per dimostrare la proprietà usiamo il principio di induzione:

- $s_0 = \sum_{i=0}^0 a_i = a_0 \frac{1-q^{0+1}}{1-q} = a_0$  la proprietà è verificata per  $n = 0$
- $s_{n+1} = a_{n+1} + s_n = a_0 q^{n+1} + a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = a_0 \frac{1-q^{n+2}}{1-q} = s_{n+1}$ , per tutti i naturali se la proprietà è vera per  $n$  allora è vera anche per  $n + 1$

**Quindi la proprietà  $s_n = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  è valida  $\forall n \in \mathbb{N}$ .**

Un vettore può essere definito come una ennupla ordinata sulla quale si definiscono le operazioni di prodotto scalare-vettore e di somma.

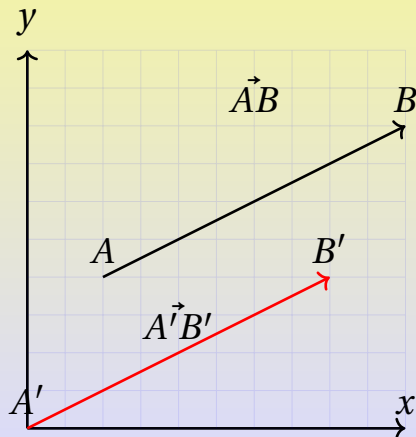


$$A(x_A, y_A)$$

$$B(x_B, y_B)$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Due vettori sono equivalenti se hanno le medesime rispettive componenti. Due vettori equivalenti hanno lo stesso modulo, direzione e verso.

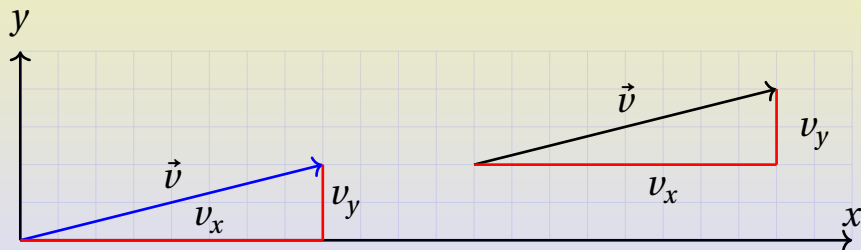


$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \\ &= \vec{A'B'} = \begin{pmatrix} x_{B'} - x_{A'} \\ y_{B'} - y_{A'} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

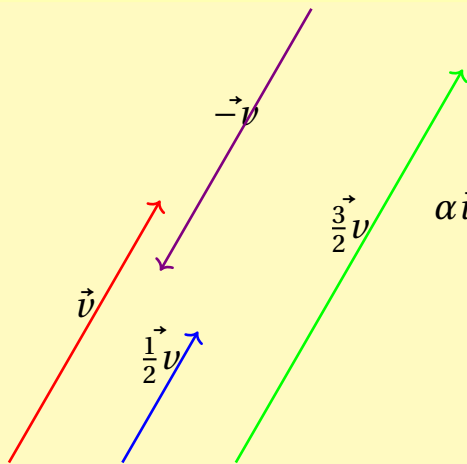
## Modulo di un vettore

Dato il vettore  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$  il suo modulo è

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$



## Prodotto scalare per vettore



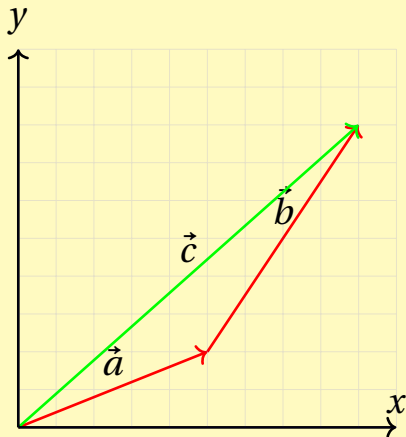
$$\alpha \vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_x \\ \alpha v_y \end{pmatrix}$$

$$|\alpha \vec{v}| = |\alpha| |\vec{v}|$$

$$\vec{v} \parallel \alpha \vec{v}$$

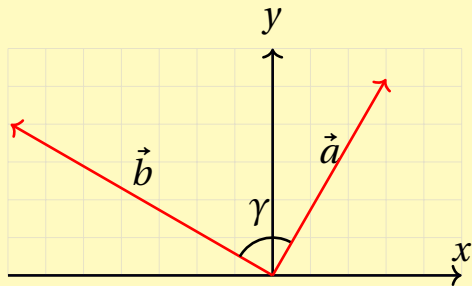


## Somma tra vettori



$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{a} + \vec{b} = \\ &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

## Prodotto scalare: definizione



$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \\ &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \\ &= a_x b_x + a_y b_y\end{aligned}$$

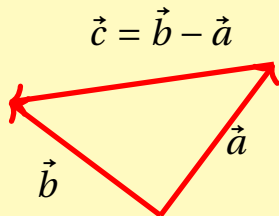
## Prodotto scalare: proprietà

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k\vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = a^2$

Le proprietà possono essere facilmente dimostrate a partire dalla definizione, dimostriamo l'ultima:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = a_x^2 + a_y^2 = |\vec{a}|^2$$

## Prodotto scalare e perpendicolarità



Per il teorema di Pitagora  
si ha:

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = (\vec{b} - \vec{a})^2$$

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Retta parallela al vettore  $\vec{v}$  e passante per il punto  $P(x_P, y_P)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\vec{v} + \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$$

Due rette, nel piano, definite rispettivamente dai vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  sono parallele se e solo se  $\vec{v} \parallel \vec{w}$ , sono perpendicolari se e solo se  $\vec{v} \perp \vec{w}$ .

Retta passante per il punto  $A(x_A, y_A)$  e  $B(x_B, y_B)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$$

Equazione cartesiana retta passante per  $P(x_P, y_P)$  e perpendicolare al vettore

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

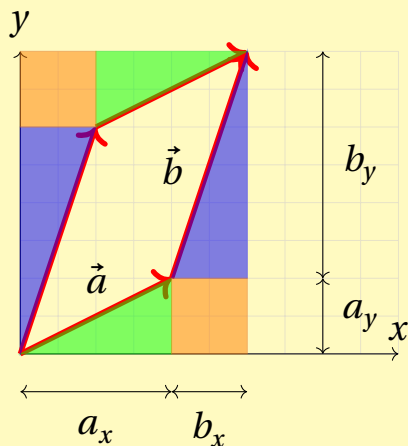
$$\begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \rightarrow a(x - x_P) + b(y - y_P) = 0$$

Ricordiamo la definizione di determinante di una matrice  $2 \times 2$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



## Determinanti e aree dei parallelogrammi



$$\begin{aligned}
 S &= |(a_x + b_x)(a_y + b_y) + \\
 &\quad -2b_x a_y - a_x a_y - b_x b_y| = \\
 &= |a_x b_y - a_y b_x| = \\
 &= \left| \det \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix} \right|
 \end{aligned}$$

**Determinanti e vettori paralleli:**

$$\vec{v} \parallel \vec{w} \rightarrow \vec{v} = k\vec{w}$$

$$\det(\vec{v} \quad \vec{w}) = \det \begin{pmatrix} v_x & w_x \\ v_y & w_y \end{pmatrix} =$$

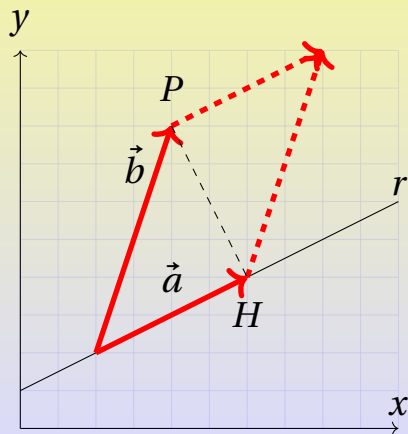
$$= \det \begin{pmatrix} kw_x & w_x \\ kw_y & w_y \end{pmatrix} = kw_x w_y - kw_x w_y = 0$$

In conclusione:

$$\vec{v} \parallel \vec{w} \leftrightarrow \det(\vec{v} \quad \vec{w}) = 0$$

# Vettori 2D e piano cartesiano Distanza punto-retta

## Distanza tra retta $r$ e punto $P$



$$PH = \frac{|\det(\vec{a} \ \vec{b})|}{|\vec{a}|}$$

I fasci di rette sono famiglie di rette ognuna delle quali si ottiene per un certo  $k \in \mathbb{R}$ .

- fascio di rette passanti per  $P(x_P, y_P)$ :  
 $y - y_P = k(x - x_P)$
- fascio di rette parallele  $y = mx + k$
- fascio generato da due rette generatrici:  
 $(ax + by + c) + k(a'x + b'y + c') = 0$

## Affinità

Una affinità è una trasformazione lineare biunivoca di punti del piano in altri punti del piano. Una affinità  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  che trasforma punti di coordinate  $(x, y)$  in punti di coordinate  $(x', y')$  può essere descritta dal sistema di equazioni:

$$\mathcal{A} : \begin{cases} x' = ax + by + h \\ y' = cx + dy + s \end{cases}$$

con  $ad - bc \neq 0$  affinché la trasformazione sia invertibile. Per ora limiteremo lo studio di queste trasformazioni ad alcuni casi particolari.

# Introduzione alle trasformazioni lineari

## Affinità e matrici

In termini matriciali una affinità  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  può essere scritta come:

$$\mathcal{A} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix}$$

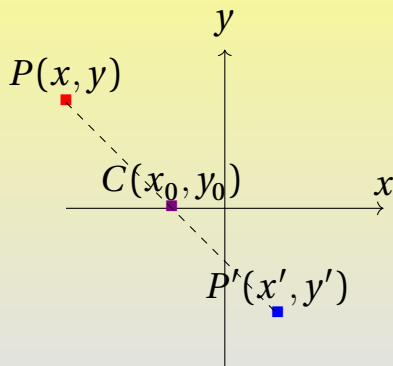
o anche:

$$\mathcal{A} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{T}$$

con  $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  una trasformazione lineare (invertibile con

$\det(L) = ad - bc \neq 0$ ) e  $\vec{T} = \begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix}$  un vettore di traslazione.

# Introduzione alle trasformazioni lineari Simmetria centrale

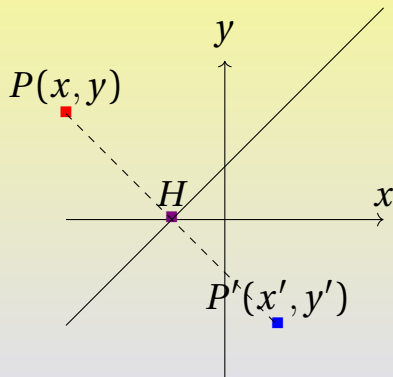


Una simmetria centrale di centro  $C(x_0, y_0)$  trasforma un punto  $P(x, y)$  in uno  $P'(x', y')$  in modo tale che  $C$  sia punto medio di  $PP'$ . Si ha quindi:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{x+x'}{2} \\ y_0 = \frac{y+y'}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = -y + 2y_0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix}$$

# Introduzione alle trasformazioni lineari Simmetria assiale



Una simmetria assiale rispetto alla retta  $s : ax + by + c = 0$  trasforma un punto  $P(x, y)$  in uno  $P'(x', y')$  in modo tale che  $PP' \perp s$  e sia  $PH = P'H$ . In termini di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax'+by'+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{a} = \frac{y-y'}{x-x'} \end{cases}$$



# Introduzione alle trasformazioni lineari Simmetria assiale

Una trasformazione di simmetria assiale ha quindi equazione:

$$\begin{cases} x' = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}x - \frac{2ab}{a^2 + b^2}y - \frac{2ac}{a^2 + b^2} \\ y' = -\frac{2ab}{a^2 + b^2}x + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}y - \frac{2bc}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

o anche (in termini matriciali):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{2c}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

# Introduzione alle trasformazioni lineari Simmetria assiale

In particolare una simmetria rispetto a  $y = y_0$  (con  $a = 0, b = 1, c = -y_0$ ) ha equazione:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2y_0 \end{cases}$$

o anche (in termini matriciali):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2y_0 \end{pmatrix}$$

# Introduzione alle trasformazioni lineari Simmetria assiale

In particolare una simmetria rispetto a  $x = x_0$  (con  $a = 1, b = 0, c = -x_0$ ) ha equazione:

$$\begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = y \end{cases}$$

o anche (in termini matriciali):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Introduzione alle trasformazioni lineari Simmetria assiale

In particolare una simmetria rispetto a  $y = x$  (con  $a = -1, b = 1, c = 0$ ) ha equazione:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

o anche (in termini matriciali):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

# Introduzione alle trasformazioni lineari Simmetria assiale

In particolare una simmetria rispetto a  $y = -x$  (con  $a = 1, b = 1, c = 0$ ) ha equazione:

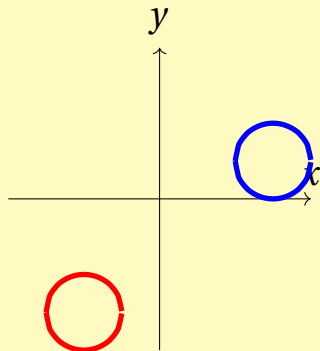
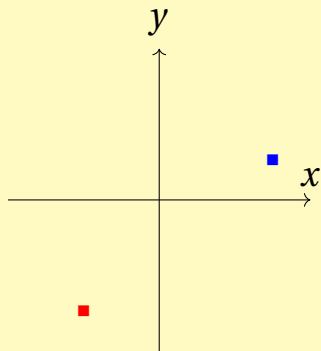
$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

o anche (in termini matriciali):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

# Introduzione alle trasformazioni lineari Traslazione

Traslazione:  $\vec{T} = \begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix}$ ,  $\blacksquare \rightarrow \blacksquare$



Equazione di una traslazione:

$$\begin{cases} x' = x + h \\ y' = y + s \end{cases}$$

o anche (in termini matriciali):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix}$$

Una dilatazione di centro l'origine ha equazione:

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$$

o anche (in termini matriciali):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Una omotetia di centro l'origine ha equazione:

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

o anche (in termini matriciali):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Grafico di  $y = f(x)$  e di  $y = -f(x)$

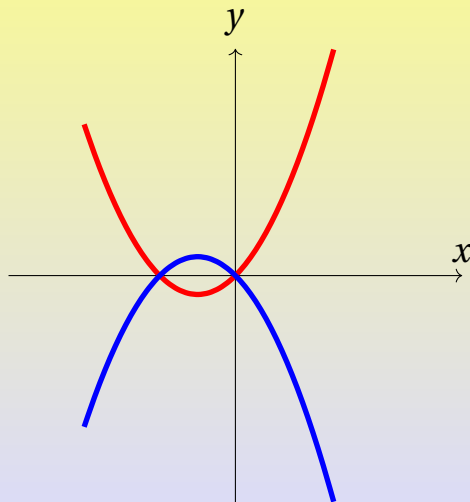


Grafico di  $y = f(x)$  e di  $y = f(-x)$

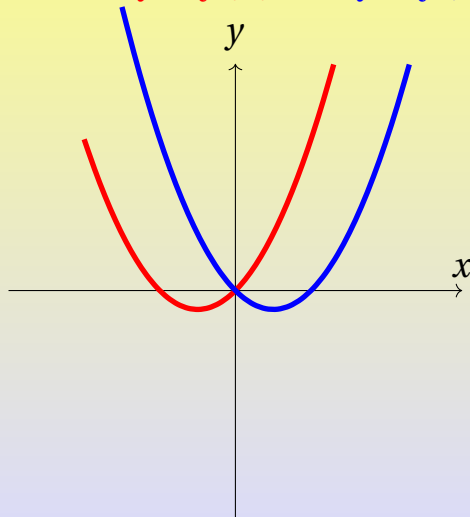


Grafico di  $y = f(x)$  e di  $y = |f(x)|$

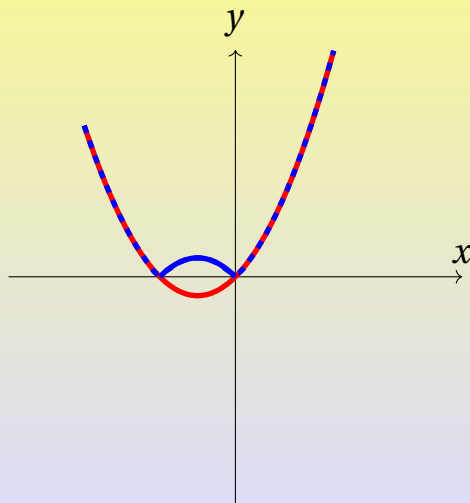


Grafico di  $y = f(x)$  e di  $y = f(|x|)$

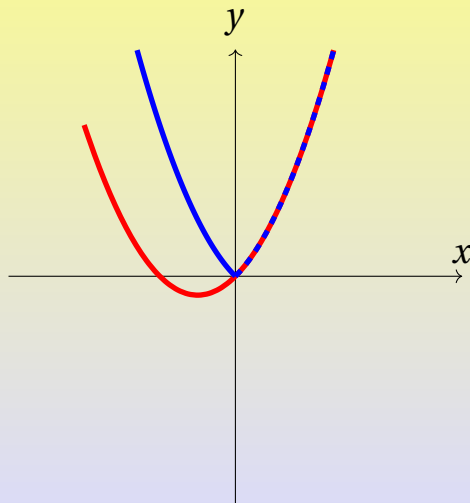


Grafico di  $y = f(x)$  e di  $y = f(x + a)$

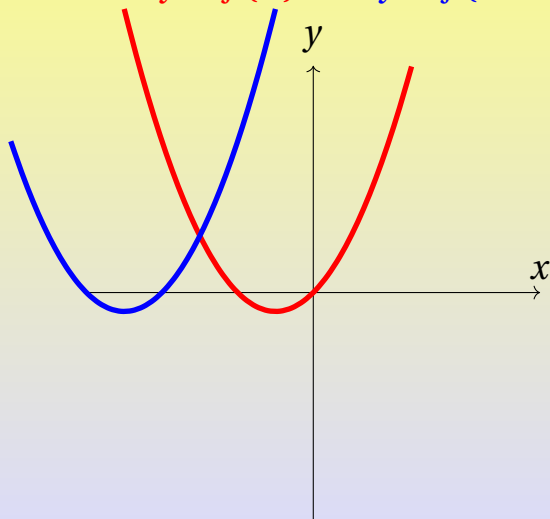


Grafico di  $y = f(x)$  e di  $y = f(x) + b$

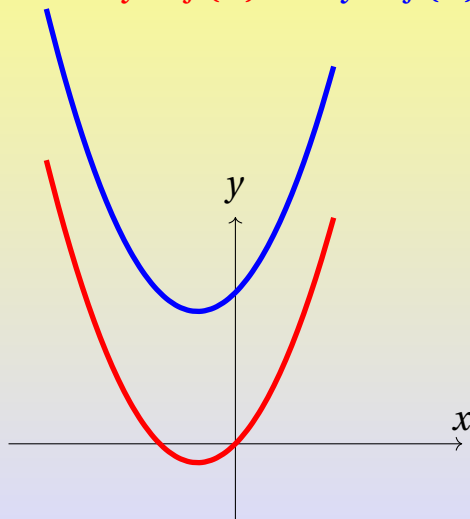


Grafico di  $y = f(x)$  e di  $y = kf(x)$

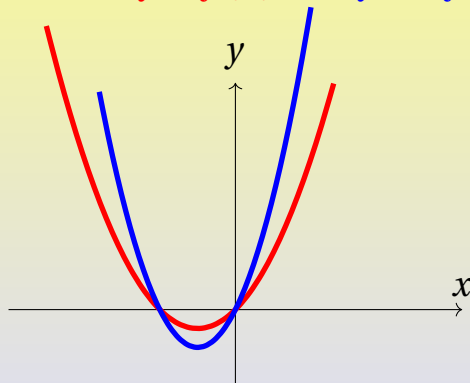
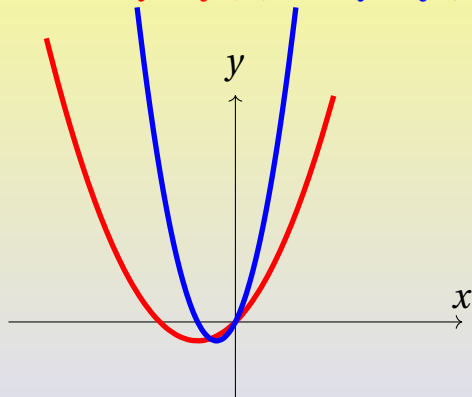


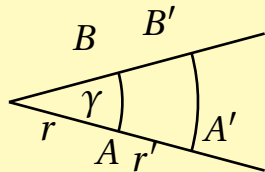


Grafico di  $y = f(x)$  e di  $y = f(kx)$



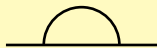
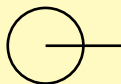
## Angolo e sua unità di misura

Un angolo per la geometria razionale è la porzione di piano compresa tra due semirette. Questa definizione di angolo non è pienamente soddisfacente in quanto definire la misura di porzioni di piano non è semplice. Si ridefinisce perciò un angolo come rapporto tra arco e raggio.



$$\gamma = \frac{\widehat{AB}}{r} = \frac{\widehat{A'B'}}{r'}$$

## Angolo e sua unità di misura



L'unità di misura degli angoli è il radiante.

Angolo giro:

$$\gamma = 2\pi$$

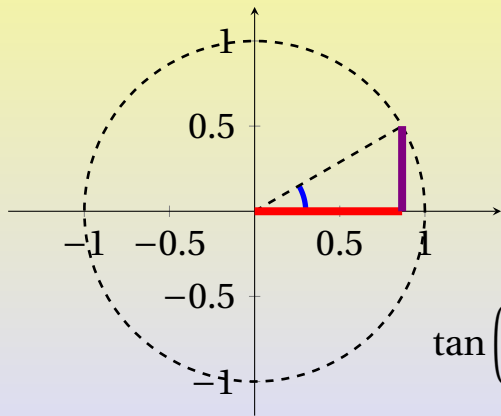
Angolo piatto:

$$\gamma = \pi$$

Angolo retto:

$$\gamma = \frac{\pi}{2}$$

Particolari valori delle funzioni goniometriche:  
angolo di  $\frac{\pi}{6}$

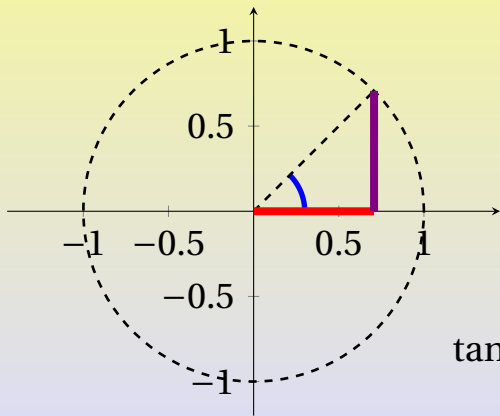


$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Particolari valori delle funzioni goniometriche:  
angolo di  $\frac{\pi}{4}$

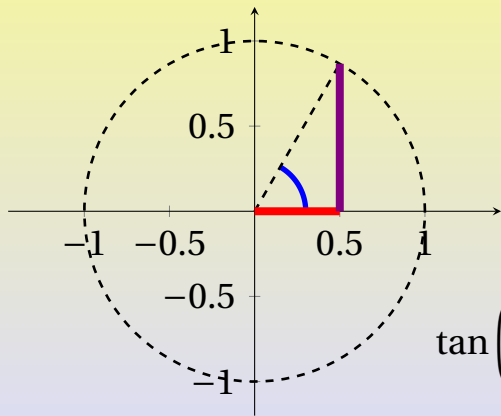


$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1$$

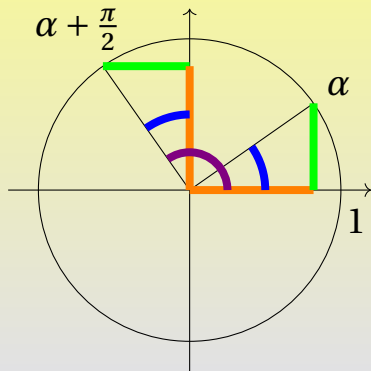
Particolari valori delle funzioni goniometriche:  
angolo di  $\frac{\pi}{3}$



$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

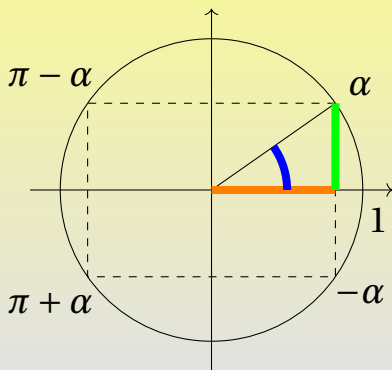
$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}$$



$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha)$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)$$



$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

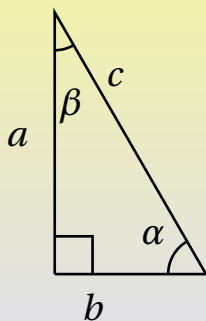
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$$



Relazioni lato-angolo in un triangolo rettangolo:



$$a = c \cdot \sin \alpha = c \cdot \cos \beta$$

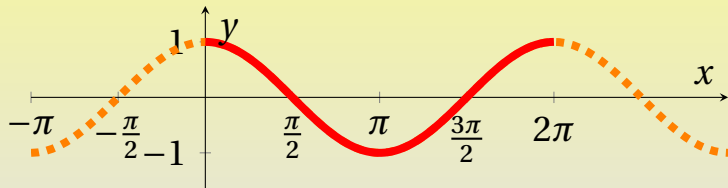
$$b = c \cdot \sin \beta = c \cdot \cos \alpha$$

$$c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\cos \beta} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{b}{\cos \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\tan \beta = \frac{b}{a}$$

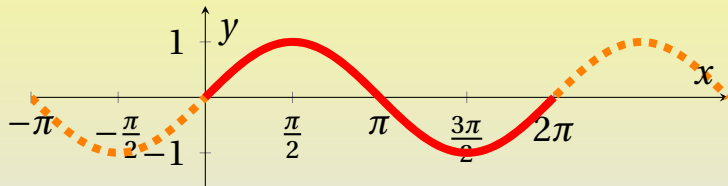
**Funzione coseno**,  $\cos(x) : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$



$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

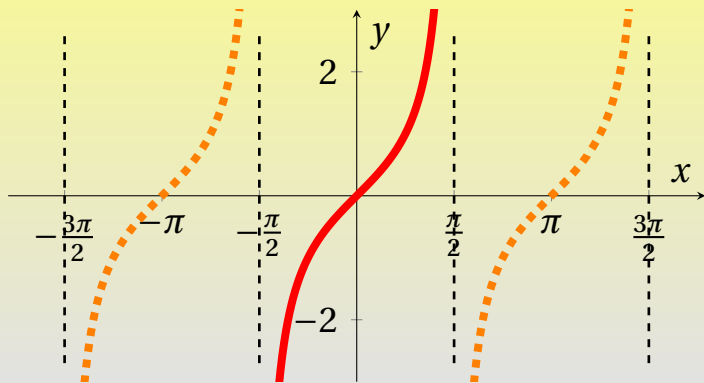
**Funzione seno**,  $\sin(x) : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$



$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

**Funzione tangente,  $\tan(x) : \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$**



$$\tan(x) = \tan(x + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

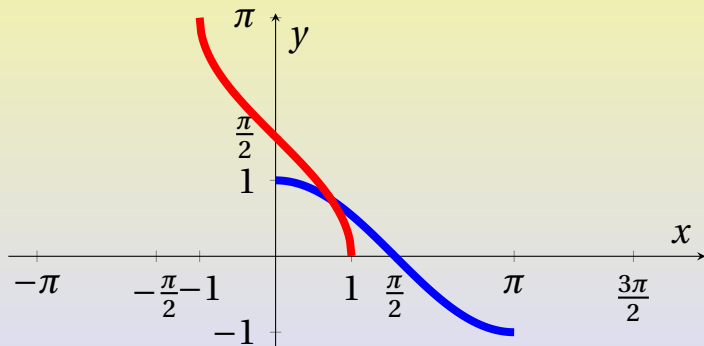
## Funzioni periodiche

Una funzione si dice periodica se per essa vale  $f(x) = f(x + T) \forall x$  del suo dominio e per un certo  $T > 0$ . Il minimo valore di  $T$  per cui è verificata la relazione precedente si dice periodo.

Seno e coseno sono periodiche di periodo  $2\pi$ ,  
tangente è periodica di periodo  $\pi$ .

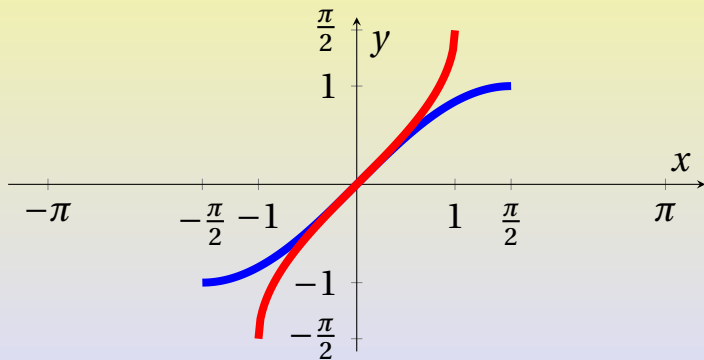
**Funzione coseno**,  $\cos(x) : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$

**Funzione arcocoseno**,  $\arccos(x) : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$



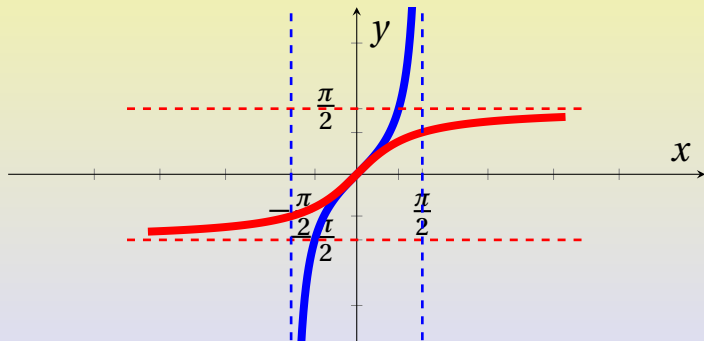
**Funzione seno**,  $\sin(x) : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$

**Funzione arcoseno**,  $\arcsin(x) : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



**Funzione tangente**,  $\tan(x) : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$

**Funzione arcotangente**,  $\arctan(x) : \mathbb{R} \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$





Per le funzioni goniometriche e le loro inverse valgono le relazioni<sup>1</sup>:

$$\cos(\arccos(x)) = \arccos(\cos(x)) = x$$

$$\sin(\arcsin(x)) = \arcsin(\sin(x)) = x$$

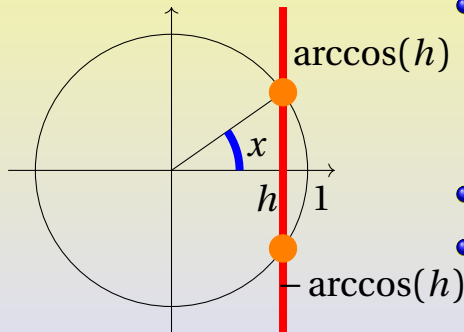
$$\tan(\arctan(x)) = \arctan(\tan(x)) = x$$

con  $x$  appartenente al dominio della funzione goniometrica o della sua inversa o di entrambe a seconda dell'insieme di esistenza delle scritture.

---

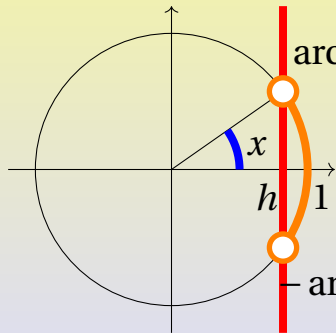
<sup>1</sup>che sono particolari applicazioni della caratteristica generale delle funzioni inverse:  $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$

$$\cos(x) = h$$



- se  $-1 < h < 1$ ,  
 $x = \arccos(h) + 2k\pi$   
 $\vee x =$   
 $-\arccos(h) + 2k\pi$
- se  $h = 1$ ,  $x = 2k\pi$
- se  $h = -1$ ,  
 $x = \pi + 2k\pi$
- se  $h > 1 \vee h < -1$ ,  
 $\nexists x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) > h$$



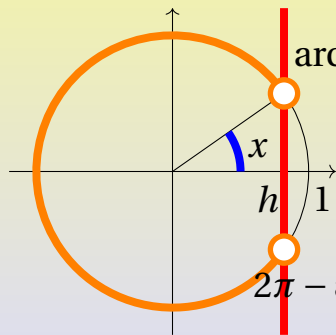
$\arccos(h)$  • se  $-1 < h < 1$ ,  
 $-\arccos(h) + 2k\pi <$   
 $x < \arccos(h) + 2k\pi$

• se  $h = -1$ ,  
 $x \neq \pi + 2k\pi$

$-\arccos(h)$  • se  $h \geq 1$ ,  $\nexists x \in \mathbb{R}$

• se  $h < -1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) < h$$



$\arccos(h)$  • se  $-1 < h < 1$ ,  
 $\arccos(h) + 2k\pi <$   
 $x <$

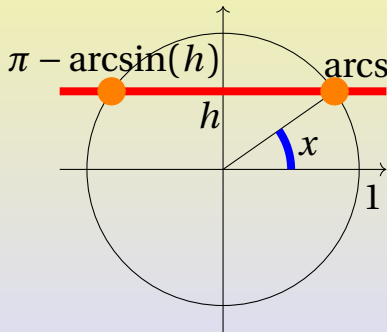
$2\pi - \arccos(h) + 2k\pi$

• se  $h = 1$ ,  $x \neq 2k\pi$

$2\pi - \arccos(h)$  • se  $h > 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$

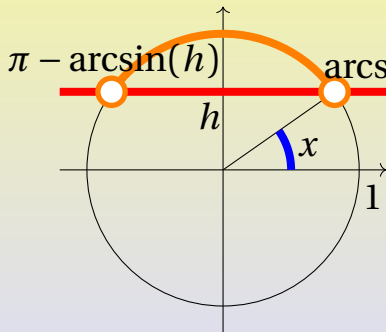
• se  $h \leq -1$ ,  $\nexists x \in \mathbb{R}$

$$\sin(x) = h$$



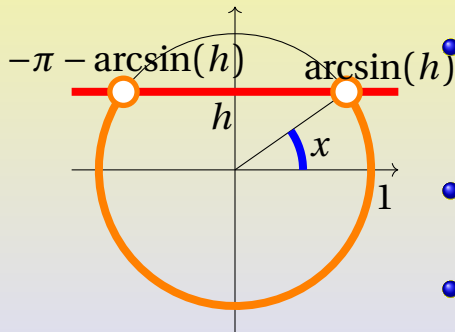
- se  $-1 < h < 1$ ,  
 $x = \arcsin(h) + 2k\pi$   
 $\vee x = \pi - \arcsin(h) + 2k\pi$
- se  $h = 1$ ,  
 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- se  $h = -1$ ,  
 $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- se  $h > 1 \vee h < -1$ ,

$$\sin(x) > h$$



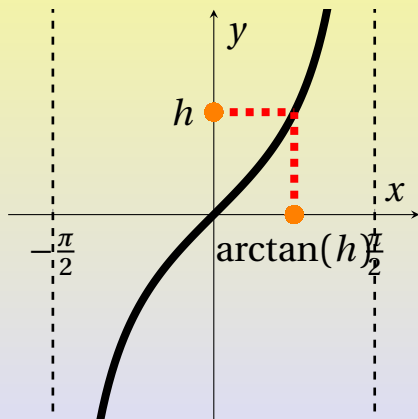
- se  $-1 < h < 1$ ,  
 $\arcsin(h) + 2k\pi < x < \pi - \arcsin(h) + 2k\pi$
- se  $h = -1$ ,  
 $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- se  $h \geq 1$ ,  $\nexists x \in \mathbb{R}$
- se  $h < -1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sin(x) < h$$



- se  $-1 < h < 1$ ,  $-\pi - \arcsin(h) + 2k\pi < x < \arcsin(h) + 2k\pi$
- se  $h = 1$ ,  
 $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- se  $h > 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$
- se  $h \leq -1$ ,  $\nexists x \in \mathbb{R}$

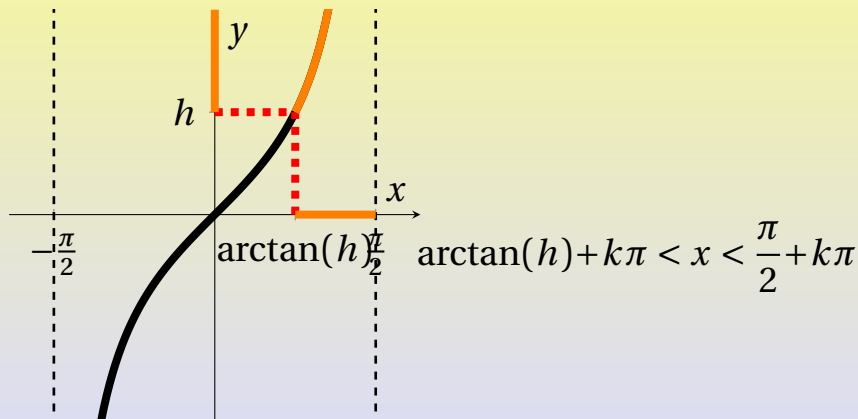
$$\tan(x) = h$$



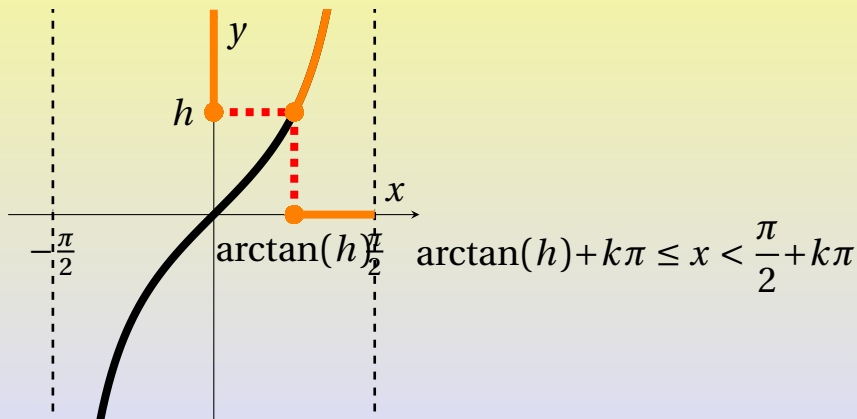
$$x = \arctan(h) + k\pi$$



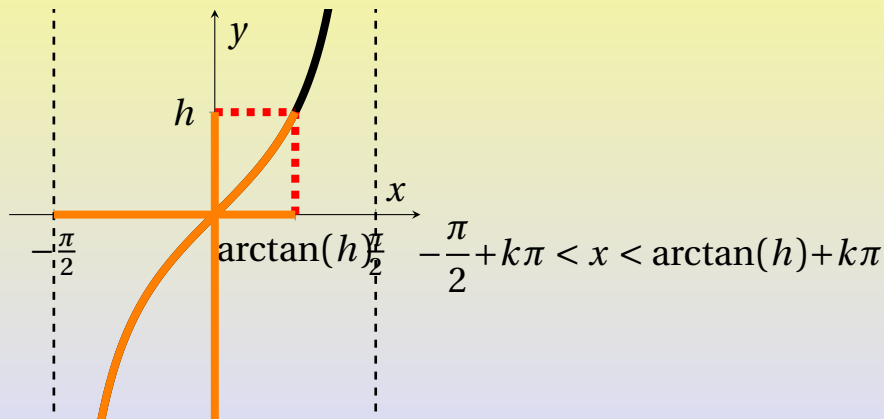
$$\tan(x) > h$$



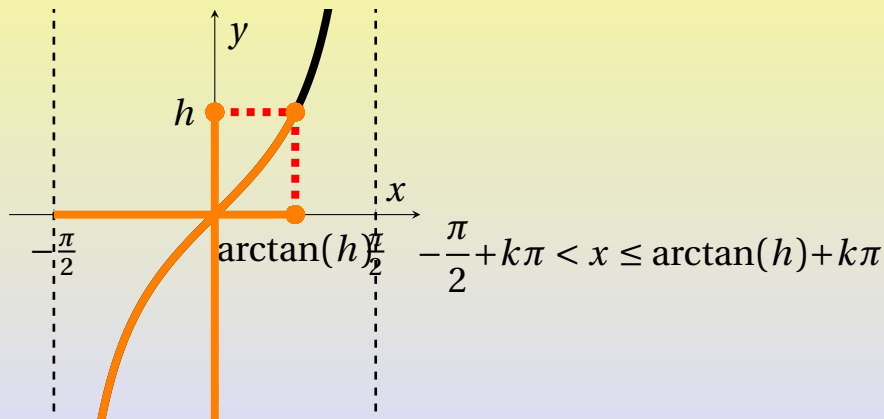
$$\tan(x) \geq h$$



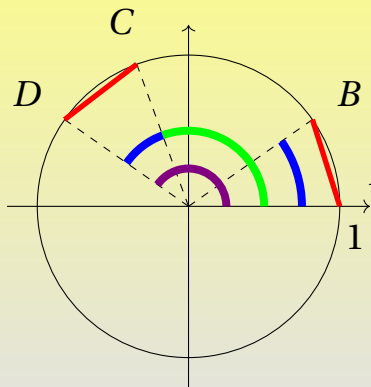
$$\tan(x) < h$$



$$\tan(x) \leq h$$



# Goniometria Formule di addizione e sottrazione



Ipotizziamo che sia:

$$0 < \beta < \alpha < 2\pi$$

$$\begin{aligned} &A(1, 0), \\ &B(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta)), \\ &C(\cos(\beta), \sin(\beta)), \\ &D(\cos(\alpha), \sin(\alpha)). \end{aligned}$$

$$AB = CD$$

$$AB^2 = CD^2$$

$$\begin{aligned} &(1 - \cos(\alpha - \beta))^2 + (-\sin(\alpha - \beta))^2 = \\ &= (\cos(\beta) - \cos(\alpha))^2 + (\sin(\beta) - \sin(\alpha))^2 \end{aligned}$$

# Goniometria Formule di addizione e sottrazione

$$(1 - \cos(\alpha - \beta))^2 + (-\sin(\alpha - \beta))^2 = (\cos(\beta) - \cos(\alpha))^2 + (\sin(\beta) - \sin(\alpha))^2$$

ricordando che  $\cos^2(\gamma) + \sin^2(\gamma) = 1$ , sviluppiamo e otteniamo:

$$2 - 2 \cos(\alpha - \beta) = 2 - 2 \cos(\alpha) \cos(\beta) - 2 \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)}$$

la relazione ottenuta è valida in generale essendo il coseno una funzione pari ( $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha)$ ) e periodica di periodo  $2\pi$ .

La formula di sottrazione del coseno può essere riscritta anche come:

$$\cos(\alpha - (-\beta)) = \cos(\alpha) \cos((-\beta)) + \sin(\alpha) \sin((-\beta))$$

ricordando che il seno è una funzione dispari e il coseno è una pari, si ottiene:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

che è la formula di addizione del coseno.

# Goniometria Formule di addizione e sottrazione

Si è già dimostrato (nella sezione dedicata agli angoli associati) che  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) = -\sin(\gamma)$ , possiamo quindi scrivere:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta)\right) = -\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \beta\right) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cos(\beta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin(\beta) = \\ &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin(\beta) =\end{aligned}$$

sempre nella sezione sugli angoli associati si è dimostrato che  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$ , in sintesi si ha:

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)}$$

che è la formula di addizione del seno.



Ricordando che il seno è una funzione dispari e il coseno è una pari, dalla formula di addizione del seno si può ottenere:

$$\sin(\alpha + (-\beta)) = \sin(\alpha) \cos(-\beta) + \cos(\alpha) \sin(-\beta)$$

da cui in sintesi si ricava la formula di sottrazione per il seno:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

# Goniometria Formule di addizione e sottrazione

Dalla definizione di tangente e dalle formule di addizione si può ottenere:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)} = \\ &= \frac{\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} + \frac{\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} - \frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}} = \frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}}{1 - \frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}} = \\ &= \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}\end{aligned}$$

# Goniometria Formule di addizione e sottrazione

Riassumendo quanto visto in precedenza la formula di addizione della tangente è:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ricordando che la tangente è una funzione dispari si può ottenere la formula di sottrazione della tangente come:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

le formule di addizione e sottrazione della tangente sono valide solamente per angoli che siano nel dominio della tangente (cioè angoli  $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ).

Dalla formula di addizione del coseno per  $\alpha = \beta$  si ottiene:

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) =$$

ricordando anche la relazione goniometrica fondamentale  $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ :

$$= 1 - 2\sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

in definitiva le formule di duplicazione del coseno sono:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

Dalla formula di addizione del seno per  $\alpha = \beta$  si ottiene:

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

in definitiva la formula di duplicazione del seno è:

$$\boxed{\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}$$

Dalla formula di addizione della tangente per  $\alpha = \beta$  si ottiene:

$$\tan(\alpha + \alpha) = \tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

in definitiva la formula di duplicazione della tangente è:

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

la formula di duplicazione della tangente ha significato solo per  $2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

Dalle formule di duplicazione del coseno si possono ricavare le equazioni  $\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$  e  $\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$  che riscritte per un angolo  $\frac{\alpha}{2}$  anziché  $\alpha$  diventano:

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2}$$

che sono le formule di bisezione per seno e coseno.

Per la tangente è possibile ricavare diverse formule di bisezione. Qui ne ricaviamo due utilizzando le formule di duplicazione e quelle di bisezione per seno e coseno:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}{\sin(\alpha)} = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin(\alpha)}{2\frac{1+\cos(\alpha)}{2}} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$$

in sintesi:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$$



Le formule di bisezione per la tangente permettono di ricavare (per  $\alpha \neq \pi + 2k\pi$ ):

$$\begin{cases} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{1-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ \sin(\alpha) = \frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \end{cases}$$

essendo l'immagine della tangente l'insieme  $\mathbb{R}$  è possibile effettuare la sostituzione  $t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$  con  $t \in \mathbb{R}$ , questo permette di esprimere le funzioni goniometriche in funzione di un parametro reale:

$\sin(\alpha) = \frac{2t}{1+t^2}$	$\cos(\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\tan(\alpha) = \frac{2t}{1-t^2}$
-----------------------------------	--------------------------------------	-----------------------------------

# Goniometria Funzione lineare in seno e coseno

Con  $a \neq 0 \wedge b \neq 0$  si ha:

$$f(x) = a \sin(x) + b \cos(x) + c = \\ = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(x) \right) + c$$

i coefficienti  $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$  e  $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$  sono tali per cui la somma dei loro quadrati è 1, possono quindi essere interpretati come un particolare seno e coseno di un certo angolo, in particolare poniamo:

$$\cos(\gamma) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{e} \quad \sin(\gamma) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

la funzione lineare scritta anche in termini di seno e coseno di  $\gamma$  diventa:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \sin(x) + b \cos(x) + c = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos(\gamma) \sin(x) + \sin(\gamma) \cos(x)) + c = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \gamma) + c \end{aligned}$$

con

$$\begin{cases} \sin(\gamma) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \cos(\gamma) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

# Goniometria Esercizi: formule di prostaferesi e di Werner

Dimostra, per esercizio, le formule di prostaferesi:

$$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

# Goniometria Esercizi: formule di prostaferesi e di Werner

Dimostra, per esercizio, le formule di Werner:

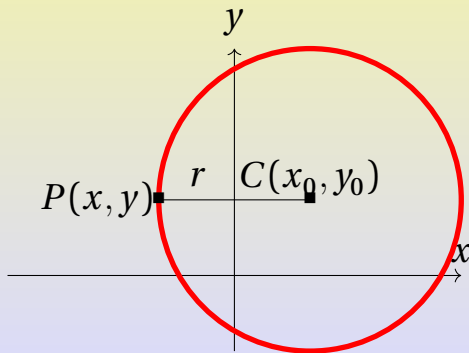
$$\sin(p) \sin(q) = \frac{1}{2} [\cos(p - q) - \cos(p + q)]$$

$$\cos(p) \cos(q) = \frac{1}{2} [\cos(p - q) + \cos(p + q)]$$

$$\sin(p) \cos(q) = \frac{1}{2} [\sin(p + q) + \sin(p - q)]$$

## Circonferenza

Una circonferenza è il luogo dei punti del piano che hanno la stessa distanza, detta raggio ( $r$ ), da un punto detto centro  $C(x_0, y_0)$ .



Equazione della circonferenza:

$$PC = r$$

$$PC^2 = r^2$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

con  $a = -2x_0$ ,  $b = -2y_0$ ,  $c = x_0^2 + y_0^2 - r^2$ .

## Tangente ad una circonferenza ( $r \neq \gamma$ )

Una tangente ad una circonferenza è una retta che interseca la circonferenza in un solo punto. Per determinare la tangente ad una circonferenza è possibile:

- intersecare retta e circonferenza ottenendo una equazione di secondo grado, che ammette una sola soluzione se e solo se il  $\Delta = 0$
- imporre che la retta disti dal centro della circonferenza quanto il raggio.



Circonferenza<sup>2</sup> in sintesi:

Equazione	Note
centro-raggio: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$	$C(x_0, y_0)$ $r > 0$
canonica: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$	$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ $r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4} - c}$

---

<sup>2</sup>le equazioni ricavate descrivono tutte le possibili circonferenze sul piano  $xOy$ .

## Fascio di circonferenze

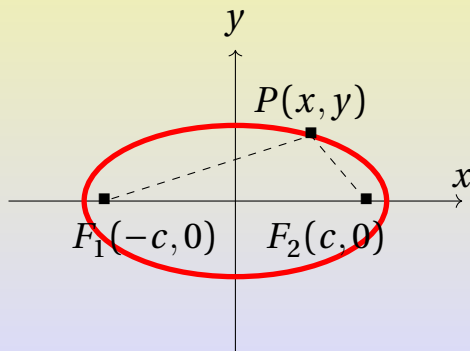
Un fascio di circonferenze è l'insieme dei punti delle curve ottenute al variare di  $k \in \mathbb{R}$  dall'equazione:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c + k(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0$$

se  $k = -1$  l'equazione del fascio di circonferenze può divenire quella di una retta, in tal caso quella retta è detta asse radicale.

## Ellisse

Una ellisse è il luogo dei punti del piano  $P(x, y)$  che mantiene costante la somma delle distanze tra due punti fissi,  $F_1$  e  $F_2$ , detti fuochi.



Equazione di una ellisse con fuochi in  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ ,  $a > 0$  e  $c > 0$ :

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$$

$$\text{se } a^2 \geq xc \rightarrow x \leq \frac{a^2}{c}$$

$$a^2((x-c)^2 + y^2) = a^4 + x^2c^2 - 2a^2xc$$

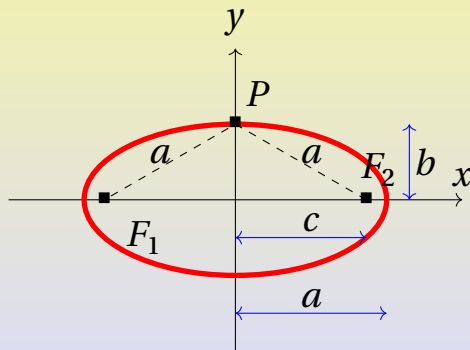
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

ponendo  $b^2 = a^2 - c^2$  si ha:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Le condizioni  $x \leq \frac{a^2}{c}$  e  $b^2 = a^2 - c^2$  risultano sempre verificate.

## Tangente ad una ellisse ( $r \not\subset \mathcal{E}$ )

Una tangente ad una ellisse è una retta che interseca l'ellisse in un solo punto. Per determinare la tangente ad una ellisse è possibile:

- intersecare retta e ellisse ottenendo una equazione di secondo grado, che ammette una sola soluzione se e solo se il  $\Delta = 0$
- trasformare l'ellisse in una circonferenza tramite una trasformazione lineare, determinare la tangente alla circonferenza e successivamente applicare la trasformazione inversa per determinare la tangente all'ellisse.

Ellisse<sup>3</sup> in sintesi:

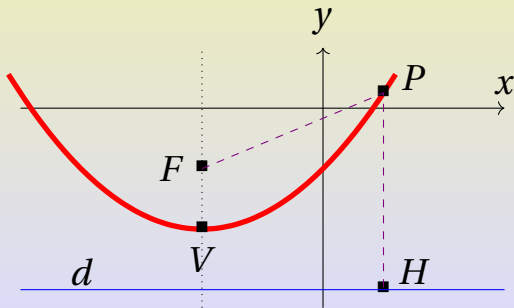
Equazione	Note
fuochi su retta $\parallel$ asse $x$ : $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ semiasse maggiore: $a$ semiasse minore: $b$	centro: $C(x_0, y_0)$ fuochi: $F(x_0 \pm c, y_0)$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ eccentricità: $e = \frac{c}{a}$
fuochi su retta $\parallel$ asse $y$ : $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ semiasse maggiore: $b$ semiasse minore: $a$	centro: $C(x_0, y_0)$ fuochi: $F(x_0, y_0 \pm c)$ $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ eccentricità: $e = \frac{c}{b}$

<sup>3</sup>le equazioni ricavate descrivono solo alcune delle possibili ellissi sul piano  $xOy$ , è possibile ricondurre tutte le ellissi a queste tramite una affinità.



## Parabola

Una parabola è il luogo dei punti del piano  $P(x, y)$  per cui rimane costante la distanza tra un punto detto fuoco ( $F$ ) e una retta detta direttrice ( $d$ ) a cui il fuoco non appartiene.



Equazione di una parabola con asse parallelo all'asse  
 $y$ :  $F(x_F, y_F)$  e direttrice  $y = d$  ( $y_F \neq d$ ):

$$PF = PH$$

$$\sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} = |y - d|$$

$$(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 = (y - d)^2$$

$$y = \frac{1}{2(y_F - d)}x^2 + \frac{-x_F}{y_F - d}x + \frac{x_F^2 + y_F^2 - d^2}{2(y_F - d)}$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

con  $a = \frac{1}{2(y_F - d)}$ ,  $b = \frac{-x_F}{y_F - d}$  e  $c = \frac{x_F^2 + y_F^2 - d^2}{2(y_F - d)}$ .

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2(y_F - d)} \\ b = \frac{-x_F}{y_F - d} \\ c = \frac{x_F^2 + y_F^2 - d^2}{2(y_F - d)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_F = -\frac{b}{2a} \\ y_F = \frac{1 - (b^2 - 4ac)}{4a} \\ d = -\frac{1 + (b^2 - 4ac)}{4a} \end{cases}$$

ricordando che  $\Delta = b^2 - 4ac$  il fuoco ha coordinate  $F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$ , la direttrice ha equazione  $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$  e l'asse di simmetria ha equazione  $x = -\frac{b}{2a}$ . Il vertice della parabola si può determinare intersecando l'asse di simmetria con la parabola stessa:

$$\begin{cases} x = -\frac{b}{2a} \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{b}{2a} \\ y = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases} \rightarrow V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

## Tangente ad una parabola ( $r \not\subset \mathcal{P}$ )

Una tangente ad una parabola è una retta che interseca la parabola in un solo punto. Per determinare la tangente ad una parabola è sufficiente intersecare retta e parabola ottenendo una equazione di secondo grado, che ammette una sola soluzione se e solo se il  $\Delta = 0$ .

Parabola<sup>4</sup> in sintesi:

Equazione	Note
asse di simmetria $\parallel$ asse $y$ : $y = ax^2 + bx + c$ concavità verso l'alto se $a > 0$ concavità verso il basso se $a < 0$	vertice: $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ fuoco: $F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$ asse di simmetria: $x = -\frac{b}{2a}$ direttrice: $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$
asse di simmetria $\parallel$ asse $x$ : $x = ay^2 + by + c$ concavità verso destra se $a > 0$ concavità verso sinistra se $a < 0$	vertice: $V\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$ fuoco: $F\left(\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$ asse di simmetria: $y = -\frac{b}{2a}$ direttrice: $x = -\frac{1+\Delta}{4a}$

<sup>4</sup>le equazioni ricavate descrivono solo alcune delle possibili parabole sul piano  $xOy$ , è possibile ricondurre tutte le parabole a queste tramite una affinità.

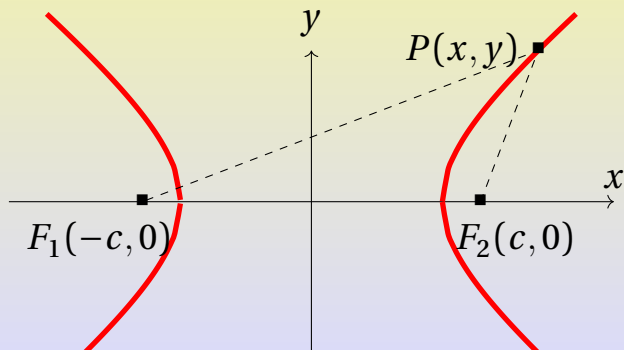
## Fascio di parabole

Un fascio di parabole è l'insieme dei punti delle curve ottenute al variare di  $k \in \mathbb{R}$  dall'equazione:

$$y - ax^2 - bx - c + k(y - a'x^2 - b'x - c') = 0$$

## Iperbole

Una iperbole è il luogo dei punti del piano  $P(x, y)$  che mantiene costante la differenza delle distanze tra due punti fissi,  $F_1$  e  $F_2$ , detti fuochi.



Equazione di una iperbole con fuochi in  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ ,  $a > 0$  e  $c > 0$ :

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2c^2 - 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -2a^2 + x^2 + y^2 + c^2$$



se  $-2a^2 + x^2 + y^2 + c^2 \geq 0 \rightarrow x^2 + y^2 \geq 2a^2 - c^2$ :

$$((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2) = (-2a^2 + x^2 + y^2 + c^2)^2$$

$$\begin{aligned} & c^4 - 2c^2x^2 + 2c^2y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = \\ & = 4a^4 - 4a^2c^2 - 4a^2x^2 - 4a^2y^2 + c^4 + 2c^2x^2 + 2c^2y^2 + x^4 + \\ & \quad + 2x^2y^2 + y^4 \end{aligned}$$

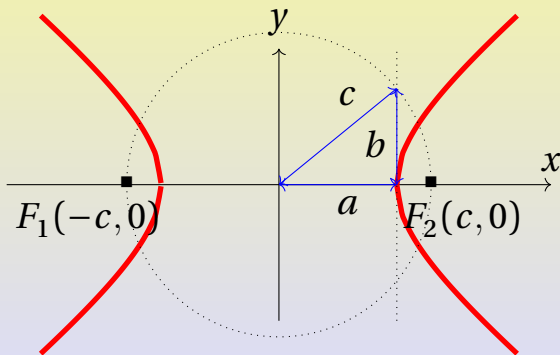
$$-2c^2x^2 = 4a^4 - 4a^2c^2 - 4a^2x^2 - 4a^2y^2 + 2c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

ponendo  $-b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow c^2 = a^2 + b^2$  si ha:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Le condizioni  $x^2 + y^2 \geq 2a^2 - c^2$  e  $c^2 = a^2 + b^2$  risultano sempre verificate.

## Asintoti dell'iperbole

Intersechiamo l'iperbole con una qualsiasi retta per l'origine per determinare per quali valori di  $m$  essa è secante l'iperbole.

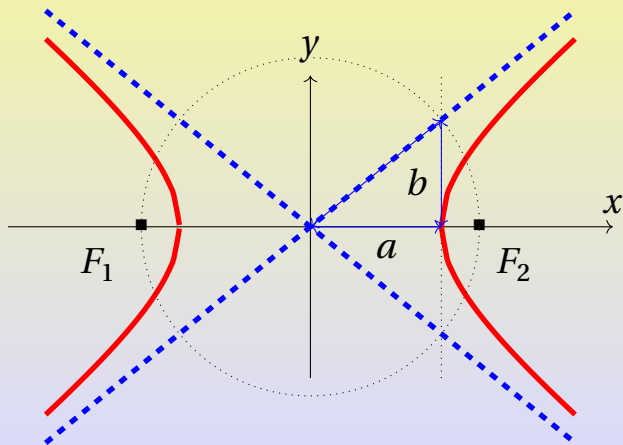
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{m^2 x^2}{b^2} = 1 \\ y = mx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (b^2 - a^2 m^2)x^2 = a^2 b^2 \\ y = mx \end{cases}$$

l'equazione di secondo grado

$$(b^2 - a^2 m^2)x^2 = a^2 b^2 \text{ ammette 2 soluzioni distinte}$$

se e solo se  $\Delta > 0 \rightarrow 4a^2 b^2 (b^2 - a^2 m^2) > 0 \rightarrow m^2 < \left(\frac{b}{a}\right)^2 \rightarrow -\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}$

Se  $-\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}$  la retta è secante l'iperbole. Le rette  $y = \pm \frac{b}{a}x$ , sono le "prime" non secanti e non tangenti all'iperbole e sono dette asintoti.



## Tangente ad una iperbole ( $r \not\subset \mathcal{I}$ )

Una tangente ad una iperbole è una retta che interseca l'iperbole in un solo punto. Per determinare la tangente ad una iperbole è sufficiente intersecare retta e iperbole ottenendo una equazione di secondo grado, che ammette una sola soluzione se e solo se il  $\Delta = 0$ .

Iperbole<sup>5</sup> in sintesi:

Equazione	Note
fuochi sull'asse $x$ : $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ centro: $C(x_0, y_0)$	fuochi: $F(x_0 \pm c, y_0)$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ asintoti: $y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$
fuochi sull'asse $y$ : $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1$ centro: $C(x_0, y_0)$	fuochi: $F(x_0, y_0 \pm c)$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ asintoti: $y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$

<sup>5</sup>le equazioni ricavate descrivono solo alcune delle possibili iperboli sul piano  $xOy$ , è possibile ricondurre tutte le iperboli a queste tramite una affinità.

## Iperboli equilateri

Una iperbole equilatera è una iperbole con  $a = b$ , la sua equazione canonica è dunque:

$$x^2 - y^2 = \pm a^2$$

gli asintoti di una iperbole equilatera sono le bisettrici del primo e terzo e del secondo e quarto quadrante ( $y = \pm x$ ). L'equazione dell'iperbole si può riscrivere come:

$$(x - y)(x + y) = \pm a^2$$

Se all'equazione  $(x - y)(x + y) = \pm a^2$  si applica la trasformazione<sup>6</sup>:

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

si ottiene l'equazione:

$$x'y' = \pm \left( \frac{\sqrt{2}}{2}a \right)^2 \rightarrow xy = k$$

detta iperbole equilatera riferita ai propri asintoti.

<sup>6</sup>la trasformazione scelta corrisponde ad una rotazione di  $\frac{\pi}{4}$



La trasformazione lineare (rotazione di  $\frac{\pi}{4}$ ) e la sua inversa consentono di trovare le coordinate dei fuochi e le equazioni degli asintoti dell'iperbole riferita ai propri asintoti:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

**Equazione:**  $(x - y)(x + y) = a^2 \rightarrow x'y' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = k$

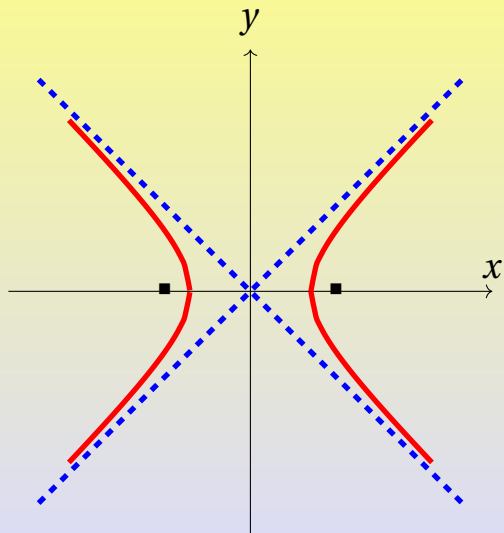
con  $k = \frac{a^2}{2} > 0$  e  $a = \sqrt{2k}$ ,  $c = 2\sqrt{k}$

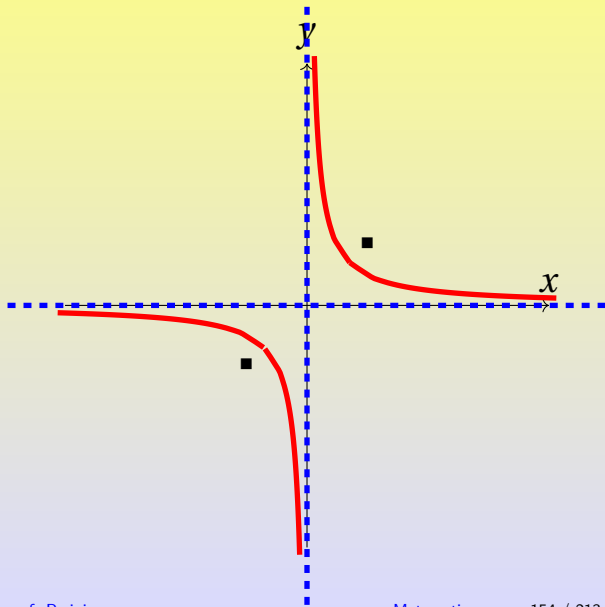
**Fuochi:**  $F(\pm c, 0) \rightarrow F'(\pm\sqrt{2k}, \pm\sqrt{2k})$

**Asintoti:**  $y = x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \rightarrow x' = 0$

$y = -x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' =$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \rightarrow y' = 0$





Iperbole equilatera riferita ai propri asintoti:

Equazione	Note
fuochi su $y = x$ : $xy = k$ $k > 0$	fuochi: $F(\pm\sqrt{2k}, \pm\sqrt{2k})$ $c = \sqrt{2a} = 2\sqrt{k}$ asintoti: $y = 0 \vee x = 0$
fuochi su $y = -x$ : $xy = k$ $k < 0$	fuochi: $F(\mp\sqrt{-2k}, \pm\sqrt{-2k})$ $c = \sqrt{2a} = 2\sqrt{-k}$ asintoti: $y = 0 \vee x = 0$

**Funzione omografica:**

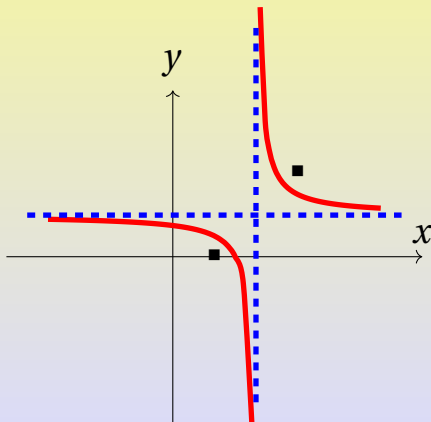
Una funzione omografica è una iperbole equilatera riferita ai propri asintoti traslata con centro in  $C(x_0, y_0)$ . L'equazione della curva per effetto della traslazione diventa:

$$(x-x_0)(y-y_0) = k \rightarrow y = \frac{\alpha y_0 x + \alpha k - \alpha x_0 y_0}{\alpha x - \alpha x_0}, \alpha \neq 0$$

possiamo riscriverla come:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ con } a = \alpha y_0, b = \alpha k - \alpha x_0 y_0, c = \alpha, d = -\alpha x_0$$

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ con } x_0 = -\frac{d}{c}, y_0 = \frac{a}{c}, k = \frac{bc - ad}{c^2}$$



## Funzione omografica:

Equazione	Note
$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $k = \frac{bc-ad}{c^2} > 0$	fuochi: $F\left(\pm\sqrt{2k} - \frac{d}{c}, \pm\sqrt{2k} + \frac{a}{c}\right)$ $c = \sqrt{2}a = 2\sqrt{k}$ asintoti: $y = \frac{a}{c} \vee x = -\frac{d}{c}$
$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $k = \frac{bc-ad}{c^2} < 0$	fuochi: $F\left(\mp\sqrt{-2k} - \frac{d}{c}, \pm\sqrt{-2k} + \frac{a}{c}\right)$ $c = \sqrt{2}a = 2\sqrt{-k}$ asintoti: $y = \frac{a}{c} \vee x = -\frac{d}{c}$

Una equazione del tipo  $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$   
<sup>7</sup> rappresenta una conica. In particolare se  $AC \neq 0$ :

$$A \left[ x^2 + \frac{D}{A}x \right] + C \left[ y^2 + \frac{E}{C}y \right] + F = 0$$

$$A \left[ \left( x + \frac{D}{2A} \right)^2 - \frac{D^2}{4A^2} \right] + C \left[ \left( y + \frac{E}{2C} \right)^2 - \frac{E^2}{4C^2} \right] + F = 0$$

$$A \left( x + \frac{D}{2A} \right)^2 + C \left( y + \frac{E}{2C} \right)^2 = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$$

---

<sup>7</sup>in generale l'equazione di una conica del tipo  
 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  è riconducibile, tramite una  
trasformazione lineare, ad una del tipo  $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ .



Una equazione del tipo

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \text{ è:}$$

- una circonferenza se:

$$A = C \neq 0 \wedge \left[ \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F \right] A > 0$$

- una ellisse se:  $AC > 0 \wedge \left[ \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F \right] A > 0$

- una parabola se:

$$\left( (A = 0 \wedge D \neq 0) \vee (C = 0 \wedge E \neq 0) \right) \wedge \overline{A = C = 0}$$

- una iperbole se:  $AC < 0 \wedge \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F \neq 0$

- un punto, una o due rette o l'insieme vuoto altrimenti.

In sintesi una equazione del tipo  
 $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  è<sup>8</sup>:

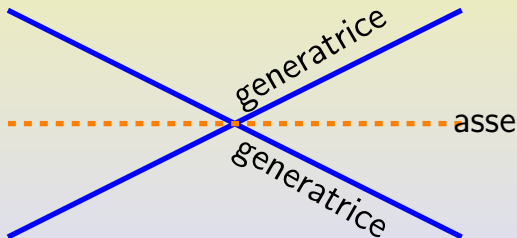
- una ellisse (eventualmente degenere) se:  
 $AC > 0$ 
  - una circonferenza (eventualmente degenere) se:  
 $A = C$
- una parabola (eventualmente degenere) se:  
 $AC = 0$
- una iperbole (eventualmente degenere) se:  
 $AC < 0$

---

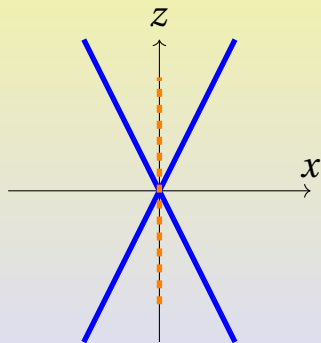
<sup>8</sup>Per conica degenere intendiamo qui una retta o una coppia di rette, un punto o l'insieme vuoto.

## Cono

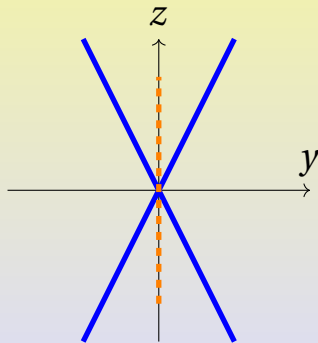
Un cono è la superficie che si ottiene facendo ruotare due rette incidenti, dette generatrici, attorno alla loro bisettrice, detta asse.



Consideriamo un “particolare” cono con asse coincidente con l'asse  $z$  di equazione  $m^2 x^2 + m^2 y^2 = z^2$ ,  $m > 0$  le cui sezioni sono:  
 sezione rispetto al piano  $y = 0$ : sezione rispetto al piano  $x = 0$ :



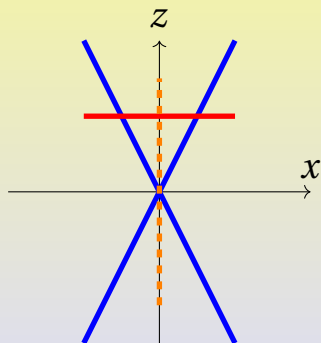
generatrici:  $z = \pm mx \wedge y = 0$



generatrici:  $z = \pm my \wedge x = 0$

## Circonferenza

sezione rispetto al piano  $y = 0$ :



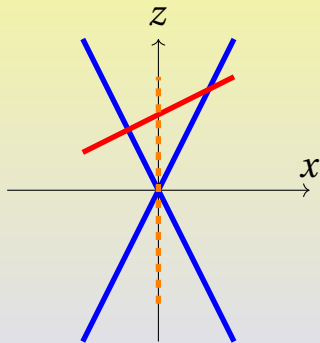
piano  $\perp$  asse:  $z = h$

$$\begin{cases} m^2 x^2 + m^2 y^2 = z^2 \\ z = h \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{h^2}{m^2}$$

## Ellisse

sezione rispetto al piano  $y = 0$ :



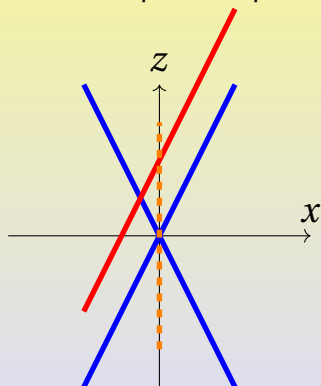
$$\begin{cases} m^2 x^2 + m^2 y^2 = z^2 \\ z = kx + q \end{cases}$$

$$\frac{m^2 - k^2}{q^2} x^2 + \frac{m^2}{q^2} y^2 - \frac{2k}{q} x = 1$$

piano:  $z = kx + q$  con  
 $-m < k < m$ ,  $q \neq 0$

## Parabola

sezione rispetto al piano  $y = 0$ :



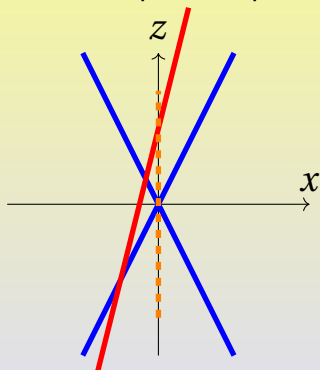
$$\begin{cases} m^2 x^2 + m^2 y^2 = z^2 \\ z = mx + q \end{cases}$$

$$x = \frac{m}{2q} y^2 - \frac{q}{2m}$$

piano:  $z = mx + q, q \neq 0$

## Iperbole

sezione rispetto al piano  $y = 0$ :



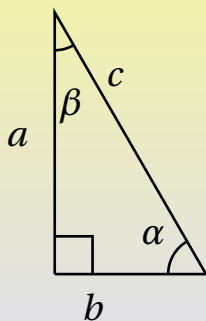
$$\begin{cases} m^2 x^2 + m^2 y^2 = z^2 \\ z = kx + q \end{cases}$$

$$\frac{k^2 - m^2}{q^2} x^2 - \frac{m^2}{q^2} y^2 + \frac{2k}{q} x = -1$$

piano:  $z = kx + q$  con  
 $k > m \vee k < -m, q \neq 0$



Relazioni lato-angolo in un triangolo rettangolo:



$$a = c \cdot \sin \alpha = c \cdot \cos \beta$$

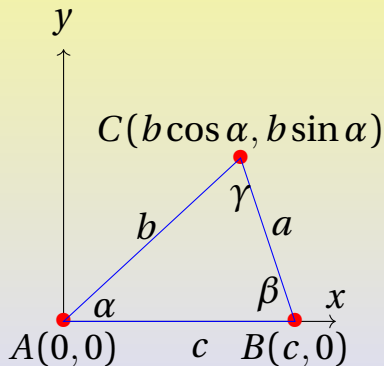
$$b = c \cdot \sin \beta = c \cdot \cos \alpha$$

$$c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\cos \beta} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{b}{\cos \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\tan \beta = \frac{b}{a}$$

Per un triangolo qualsiasi posizionato come in figura si ottiene una relazione che permette di ottenere l'area del triangolo  $ABC$ .



$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} b \cos \alpha \\ b \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'area del triangolo  $ABC$  si può ottenere dalla relazione qui sotto dimostrata

( $b > 0$ ,  $c > 0$ ,  $0 \leq \alpha \leq \pi$ ,  $\sin \alpha \geq 0$ ):

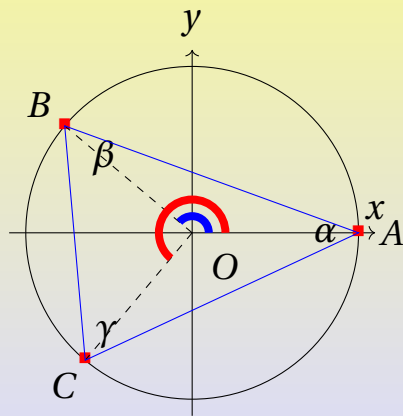
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}x_{BYC} = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$$

In conclusione:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$$

# Trigonometria Teorema della corda e dei seni

Ogni triangolo può essere inscritto in una circonferenza, scegliamo di inserirne uno  $ABC$  come in figura.



$$0 < v < w < 2\pi$$

$$O(0,0), A(r,0),$$

$$B(r \cos(v), r \sin(v)),$$

$$C(r \cos(w), r \sin(w))$$

$$\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \frac{\pi - v}{2}$$

$$\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \frac{\pi - (w - v)}{2}$$

$$\widehat{OCA} = \widehat{OAC} = \frac{\pi - (2\pi - w)}{2}$$



$$\begin{aligned} AB = c &= r\sqrt{(\cos(v) - 1)^2 + (\sin(v))^2} = \\ &= r\sqrt{\cos(v)^2 + \sin(v)^2 + 1 - 2\cos(v)} = \\ &= 2r\sqrt{\frac{1 - \cos(v)}{2}} = 2r\sin\left(\frac{v}{2}\right) = 2r\sin(\gamma) \end{aligned}$$

in sintesi:

$$c = 2r\sin(\gamma)$$

$$\begin{aligned}AC &= b = r\sqrt{(\cos(w) - 1)^2 + (\sin(w))^2} = \\&= r\sqrt{\cos(w)^2 + \sin(w)^2 + 1 - 2\cos(w)} = \\&= 2r\sqrt{\frac{1 - \cos(w)}{2}} = 2r\sin\left(\frac{w}{2}\right) = 2r\sin\left(\pi - \frac{w}{2}\right) = \\&= 2r\sin\left(\frac{2\pi - w}{2}\right) = 2r\sin(\beta)\end{aligned}$$

in sintesi:

$$b = 2r\sin(\beta)$$

$$\begin{aligned}BC &= a = r\sqrt{(\cos(w) - \cos(v))^2 + (\sin(w) - \sin(v))^2} = \\&= r\sqrt{2 - 2\cos(w)\cos(v) - 2\sin(w)\sin(v)} = \\&= 2r\sqrt{\frac{1 - (\cos(w)\cos(v) + \sin(w)\sin(v))}{2}} = \\&= 2r\sqrt{\frac{1 - \cos(w - v)}{2}} = 2r\sin\left(\frac{w - v}{2}\right) = 2r\sin(\alpha)\end{aligned}$$

in sintesi:

$$a = 2r\sin(\alpha)$$



Tenendo conto di quanto ottenuto possiamo enunciare i seguenti teoremi.

## Teorema della corda

La misura di una corda di una circonferenza è pari al prodotto della misura del diametro della circonferenza per il seno dell'angolo alla circonferenza che insiste sulla corda.

## Teorema dei seni

In un triangolo con lati di misura  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , con angoli opposti rispettivamente  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  vale la relazione:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

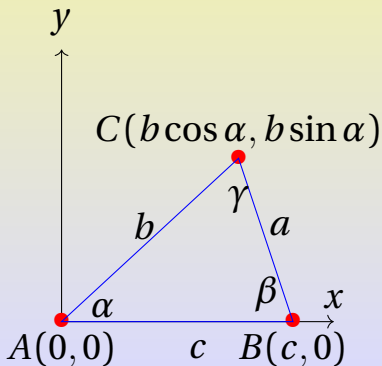
I teoremi della corda e dei seni si possono sintetizzare in un solo teorema.

## Teorema dei seni e della corda

In un triangolo con lati di misura  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , con angoli opposti rispettivamente  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  e inscritto in una circonferenza di raggio  $r$ , vale la relazione:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r$$

Inseriamo un triangolo in un piano cartesiano per ottenere un teorema che è l'estensione ad un triangolo qualsiasi del teorema di Pitagora (il teorema del coseno è noto anche come teorema di Carnot).



$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} b \cos \alpha \\ b \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} b \cos \alpha - c \\ b \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Tenendo conto del fatto che

$a > 0, b > 0, c > 0, 0 \leq \alpha \leq \pi, \sin \alpha \geq 0$ ):

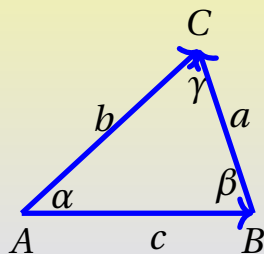
$$a = |\vec{BC}|$$

$$\begin{aligned} a^2 &= \vec{BC}^2 = (b \cos \alpha - c)^2 + (b \sin \alpha)^2 = \\ &= b^2 \cos^2 \alpha + c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2 \sin^2 \alpha = \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \end{aligned}$$

In conclusione:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Grazie al teorema di Carnot è possibile ridefinire il prodotto scalare nei termini del modulo dei vettori moltiplicati e dell'angolo tra essi compreso.



$$|\vec{AB}| = c$$

$$|\vec{BC}| = a$$

$$|\vec{AC}| = b$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$$

$$(\vec{BC})^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB}$$

confrontando quest'ultima scrittura con il teorema di Carnot su  $ABC$ ,  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$ , si può ottenere la relazione:

$$\vec{AC} \cdot \vec{AB} = bc \cos(\alpha) = |\vec{AC}| \cdot |\vec{AB}| \cos(\alpha)$$

In generale il prodotto scalare tra due vettori è il prodotto del modulo dei vettori per il coseno dell'angolo tra essi compreso.

## Prodotto scalare

Il prodotto scalare tra due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  tra cui è compreso l'angolo  $\gamma$  si può scrivere anche come:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos(\gamma)$$

$$\begin{aligned}(ax_1 + b) + (ax_2 + b) + \cdots + (ax_i + b) + \cdots + (ax_n + b) &= \\ &= (ax_1 + ax_2 + \cdots + ax_i + \cdots + ax_n) + \underbrace{b + \cdots + b}_{n\text{-volte}} = \\ &= a(x_1 + x_2 + \cdots + x_i + \cdots + x_n) + nb\end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (ax_i + b) &= \\ &= \sum_{i=1}^n ax_i + \sum_{i=1}^n b = \\ &= a \sum_{i=1}^n x_i + nb\end{aligned}$$



Indichiamo un dato di una indagine statistica con una lettera minuscola e un pedice:

$$x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N$$

a dati diversi corrispondono pedici diversi, a dati uguali corrispondono pedici uguali, la statistica comprende  $N$  dati in totale.

Un medesimo dato può presentarsi più volte, in questo caso ad esso associamo una frequenza, cioè il numero di volte che tale dato si è presentato:

$X$	$f$
$x_1$	$f_1$
$x_2$	$f_2$
...	...
$x_i$	$f_i$
...	...
$x_n$	$f_n$

La scrittura significa che il dato  $x_i$  si è presentato un numero  $f_i$  di volte.

La totalità dei dati di una statistica è pari alla somma delle frequenze:

$$N = \sum_{i=1}^n f_i$$

Sono frequenze relative le  $f_R$ :

$X$	$f$	$f_R$
$x_1$	$f_1$	$\frac{f_1}{N}$
$x_2$	$f_2$	$\frac{f_2}{N}$
...	...	...
$x_i$	$f_i$	$\frac{f_i}{N}$
...	...	...
$x_n$	$f_n$	$\frac{f_n}{N}$

Le frequenze cumulate si ottengono sommando le frequenze assolute come mostrato in tabella:

$X$	$f$	$f_C$
$x_1$	$f_1$	$f_1$
$x_2$	$f_2$	$f_1 + f_2$
...	...	...
$x_i$	$f_i$	$f_1 + f_2 + \dots + f_i$
...	...	...
$x_n$	$f_n$	$N$

Le frequenze relative cumulate si ottengono sommando le frequenze relative come mostrato in tabella:

$X$	$f$	$f_{RC}$
$x_1$	$f_1$	$\frac{f_1}{N}$
$x_2$	$f_2$	$\frac{f_1+f_2}{N}$
...	...	...
$x_i$	$f_i$	$\frac{f_1+f_2+\dots+f_i}{N}$
...	...	...
$x_n$	$f_n$	1

La media aritmetica dei dati di una statistica è data dalla relazione:

$$\mu = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N}$$

oppure, utilizzando le frequenze:

$$\mu = \sum_{i=1}^n \frac{f_i x_i}{N}$$

oppure utilizzando le frequenze relative:

$$\mu = \sum_{i=1}^n f_{Ri} x_i$$

La varianza dei dati di una statistica è data dalla relazione:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \boxed{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \mu)^2}{N}} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2}{N} = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{N} - 2\mu \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N} + \frac{N\mu^2}{N} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{N} - 2\mu^2 + \mu^2 = \\ &= \boxed{\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{N} - \mu^2}\end{aligned}$$

La deviazione standard o scarto quadratico medio è dato dalla:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \mu)^2}{N}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{N} - \mu^2}$$

oppure in termini di frequenze assolute:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{f_i(x_i - \mu)^2}{N}}$$



Lo scopo che ci prefiggiamo di raggiungere è di definire un indice che dia conto della dipendenza statistica tra due caratteri  $X$  e  $Y$ . Tabuliamo le frequenze con cui compaiono i caratteri oggetto di studio per meglio comprendere quale sia la relazione che intercorre tra le due. Denoteremo con  $f(x_i, y_j)$  la frequenza con cui vengono rilevati entrambi i caratteri  $x_i$  e  $y_j$  (frequenze congiunte) e con  $f(x_i)$  e  $f(y_j)$  la totalità delle frequenze rispettivamente di  $x_i$  e  $y_j$  (frequenze marginali). L'insieme delle frequenze marginali è detto distribuzione marginale.

Tabella delle frequenze:

	$y_1$	...	$y_j$	...	$y_h$	Totale
$x_1$	$f(x_1, y_1)$	...	$f(x_1, y_j)$	...	$f(x_1, y_h)$	$f(x_1)$
...	...	...	...	...	...	...
$x_i$	$f(x_i, y_1)$	...	$f(x_i, y_j)$	...	$f(x_i, y_h)$	$f(x_i)$
...	...	...	...	...	...	...
$x_k$	$f(x_k, y_1)$	...	$f(x_k, y_j)$	...	$f(x_k, y_h)$	$f(x_k)$
Totale	$f(y_1)$	...	$f(y_j)$	...	$f(y_h)$	$n$

$$\text{Frequenze marginali di } X: f(x_i) = \sum_{j=1}^h f(x_i, y_j)$$

$$\text{Frequenze marginali di } Y: f(y_j) = \sum_{i=1}^k f(x_i, y_j)$$

$$\text{Totale delle frequenze: } n = \sum_{i=1}^k f(x_i) = \sum_{j=1}^h f(y_j) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^h f(x_i, y_j)$$

**Tabella delle frequenze nell'ipotesi che  $X$  e  $Y$  siano indipendenti:**

	$y_1$	...	$y_j$	...	$y_h$	Totale
$x_1$	$f'(x_1, y_1)$	...	$f'(x_1, y_j)$	...	$f'(x_1, y_h)$	$f(x_1)$
...	...	...	...	...	...	...
$x_i$	$f'(x_i, y_1)$	...	$f'(x_i, y_j)$	...	$f'(x_i, y_h)$	$f(x_i)$
...	...	...	...	...	...	...
$x_k$	$f'(x_k, y_1)$	...	$f'(x_k, y_j)$	...	$f'(x_k, y_h)$	$f(x_k)$
Totale	$f(y_1)$	...	$f(y_j)$	...	$f(y_h)$	$n$

$$\text{Frequenze teoriche: } f'(x_i, y_j) = n \left( \frac{f(x_i)}{n} \right) \left( \frac{f(y_j)}{n} \right) = \frac{f(x_i)f(y_j)}{n}$$

$$\text{Freq. marginali di } X: \sum_{j=1}^h f'(x_i, y_j) = \sum_{j=1}^h \frac{f(x_i)f(y_j)}{n} = \frac{f(x_i)}{n} \sum_{j=1}^h f(y_j) = f(x_i)$$

$$\text{Freq. marginali di } Y: \sum_{i=1}^k f'(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^k \frac{f(x_i)f(y_j)}{n} = \frac{f(y_j)}{n} \sum_{i=1}^k f(x_i) = f(y_j)$$

**Tabella delle contingenze (differenza tra frequenze rilevate e teoriche):**

	$y_1$	...	$y_j$	...	$y_h$	Totale
$x_1$	$c(x_1, y_1)$	...	$c(x_1, y_j)$	...	$c(x_1, y_h)$	0
...	...	...	...	...	...	0
$x_i$	$c(x_i, y_1)$	...	$c(x_i, y_j)$	...	$c(x_i, y_h)$	0
...	...	...	...	...	...	0
$x_k$	$c(x_k, y_1)$	...	$c(x_k, y_j)$	...	$c(x_k, y_h)$	0
Totale	0	0	0	0	0	0

Contingenze:  $c(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) - f'(x_i, y_j)$

$$\text{F. m. cont. di } X: \sum_{j=1}^h c(x_i, y_j) = \sum_{j=1}^h f(x_i, y_j) - \sum_{j=1}^h f'(x_i, y_j) = f(x_i) - f(x_i) = 0$$

$$\text{F. m. cont. di } Y: \sum_{i=1}^k c(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^k f(x_i, y_j) - \sum_{i=1}^k f'(x_i, y_j) = f(y_j) - f(y_j) = 0$$

Le contingenze sono a somma nulla, per ottenere un indice complessivo non identicamente nullo si sceglie di tenere conto dei quadrati delle contingenze divisi per la frequenza teorica.

**Tabella delle  $d(x_i, y_j) = \frac{c^2(x_i, y_j)}{f'(x_i, y_j)}$ :**

	$y_1$	...	$y_j$	...	$y_h$	Totale
$x_1$	$d(x_1, y_1)$	...	$d(x_1, y_j)$	...	$d(x_1, y_h)$	...
...	...	...	...	...	...	...
$x_i$	$d(x_i, y_1)$	...	$d(x_i, y_j)$	...	$d(x_i, y_h)$	...
...	...	...	...	...	...	...
$x_k$	$d(x_k, y_1)$	...	$d(x_k, y_j)$	...	$d(x_k, y_h)$	...
Totale	...	...	...	...	...	$\chi^2$

$$\text{Chi quadro: } \chi^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^h \frac{c^2(x_i, y_j)}{f'(x_i, y_j)}$$

Se  $X$  e  $Y$  sono **indipendenti** si ha

$$f(x_i, y_j) = f'(x_i, y_j) \text{ e quindi } \frac{c^2(x_i, y_j)}{f'(x_i, y_j)} = 0$$

Tabella delle  $d(x_1, y_j) = \frac{c^2(x_i, y_j)}{f'(x_i, y_j)}$  in caso di  $X$  e  $Y$  indipendenti:

	$y_1$	...	$y_j$	...	$y_h$	Totale
$x_1$	0	...	0	...	0	0
...	...	...	...	...	...	0
$x_i$	0	...	0	...	0	0
...	...	...	...	...	...	0
$x_k$	0	...	0	...	0	0
Totale	0	0	0	0	0	$\chi^2 = 0$

Se  $X$  e  $Y$  sono **dipendenti** si ha

$$f(x_i, y_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ f(x_i) = f(y_j) & \text{se } i = j \end{cases}$$

$$f(x_i) = 0 \text{ se } i > \min(h, k), \quad f(y_j) = 0 \text{ se } j > \min(h, k)$$

Tabella delle frequenze nel caso di  $X$  e  $Y$  **dipendenti**:

	$y_1$	...	$y_i$	...	$y_k$	...	$y_h$	Totale
$x_1$	$f(x_1)$	0	0	0	0	0	0	$f(x_1)$
...	0	...	0	0	0	0	0	...
$x_i$	0	0	$f(x_i)$	0	0	0	0	$f(x_i)$
...	0	0	0	...	0	0	0	...
$x_k$	0	0	0	0	$f(x_k)$	0	0	$f(x_k)$
Totale	$f(x_1)$	...	$f(x_i)$	...	$f(x_k)$	0	0	$n$

La perfetta dipendenza si ha se  $x_i \rightarrow y_i$  e viceversa per ogni  $i$ , il massimo numero di connessioni è  $\min(k, h)$ .

Se  $X$  e  $Y$  sono **dependenti** le frequenze teoriche diventano:

$$f'(x_i, y_j) = \begin{cases} \frac{f(x_i)f(y_j)}{n} & \text{se } i \leq \min(h, k) \wedge j \leq \min(h, k) \\ 0 & \text{se } i > \min(h, k) \vee j > \min(h, k) \end{cases}$$

Tabella delle frequenze nel caso di  $X$  e  $Y$  **dependenti**:

	$y_1$	...	$y_i$	...	$y_k$	...	$y_h$	Totale
$x_1$	$\frac{f^2(x_1)}{n}$	...	$f'(x_1, y_i)$	...	$f'(x_1, y_k)$	0	0	$f(x_1)$
...	...	...	...	...	...	0	0	...
$x_i$	$f'(x_i, y_1)$	...	$\frac{f^2(x_i)}{n}$	...	$f'(x_i, y_k)$	0	0	$f(x_i)$
...	...	...	...	...	...	0	0	...
$x_k$	$f'(x_k, y_1)$	...	$f'(x_k, y_i)$	...	$\frac{f^2(x_k)}{n}$	0	0	$f(x_k)$
Totale	$f(x_1)$	...	$f(x_i)$	...	$f(x_k)$	0	0	$n$



$$\begin{aligned}\frac{c^2(x_i, y_j)}{f'(x_i, y_j)} &= \frac{\left(f(x_i, y_j) - f'(x_i, y_j)\right)^2}{f'(x_i, y_j)} = \\ &= \left(f(x_i, y_j) - \frac{f(x_i)f(y_j)}{n}\right)^2 \frac{n}{f(x_i)f(y_j)} = \\ &= \left(f^2(x_i, y_j) - 2\frac{f(x_i, y_j)f(x_i)f(y_j)}{n} + \frac{f^2(x_i)f^2(y_j)}{n^2}\right) \frac{n}{f(x_i)f(y_j)} = \\ &= \frac{nf^2(x_i, y_j)}{f(x_i)f(y_j)} - 2f(x_i, y_j) + \frac{f(x_i)f(y_j)}{n}\end{aligned}$$

Nel caso della perfetta dipendenza si ha:

$$\frac{c^2(x_i, y_j)}{f'(x_i, y_j)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \vee j > \min(h, k) \\ n - 2f(x_i) + \frac{f^2(x_i)}{n} & \text{se } i = j \\ \frac{f(x_i)f(y_j)}{n} & \text{se } i \neq j \leq \min(h, k) \end{cases}$$

per la somma di tutte le celle ( $\chi^2$ ):

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{\min(h,k)} \left( n - 2f(x_i) + \frac{f^2(x_i)}{n} \right)}_{i=j} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\min(h,k)} \sum_{j=1}^{\min(h,k)} \frac{f(x_i)f(y_j)}{n}}_{i \wedge j \leq \min(h,k)} - \underbrace{\sum_{i=1}^{\min(h,k)} \frac{f^2(x_i)}{n}}_{i=j \leq \min(h,k)} =$$

$$\underbrace{\sum_{i \neq j \leq \min(h,k)} \frac{f(x_i)f(y_j)}{n}}_{i \neq j \leq \min(h,k)}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{\min(h,k)} (n - 2f(x_i)) + \sum_{i=1}^{\min(h,k)} \sum_{j=1}^{\min(h,k)} \frac{f(x_i)f(y_j)}{n} = \\ &= n \cdot \min(h, k) - 2n + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\min(h,k)} f(x_i) \sum_{j=1}^{\min(h,k)} f(y_j) = \\ &= n \cdot \min(h, k) - 2n + \frac{n^2}{n} = n(\min(h, k) - 1) \end{aligned}$$

Formula alternativa per il  $\chi^2$ :

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^h \frac{c^2(x_i, y_j)}{f'(x_i, y_j)} = \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^h \left( \frac{nf^2(x_i, y_j)}{f(x_i)f(y_j)} - 2f(x_i, y_j) + \frac{f(x_i)f(y_j)}{n} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^h \frac{nf^2(x_i, y_j)}{f(x_i)f(y_j)} - 2n + n = \\ &= n \left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^h \frac{f^2(x_i, y_j)}{f(x_i)f(y_j)} - 1 \right)\end{aligned}$$

In sintesi la tabella delle  $d(x_i, y_j) = \frac{c^2(x_i, y_j)}{f'(x_i, y_j)}$ :

	$y_1$	...	$y_j$	...	$y_h$	Totale
$x_1$	$d(x_1, y_1)$	...	$d(x_1, y_j)$	...	$d(x_1, y_h)$	...
...	...	...	...	...	...	...
$x_i$	$d(x_i, y_1)$	...	$d(x_i, y_j)$	...	$d(x_i, y_h)$	...
...	...	...	...	...	...	...
$x_k$	$d(x_k, y_1)$	...	$d(x_k, y_j)$	...	$d(x_k, y_h)$	...
Totale	...	...	...	...	...	$\chi^2$

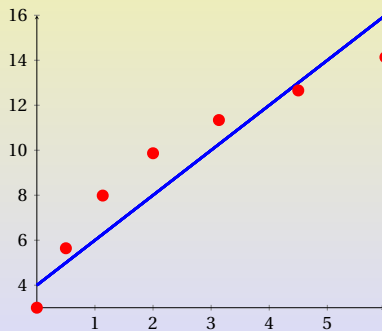
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^h \frac{c^2(x_i, y_j)}{f'(x_i, y_j)} = n \left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^h \frac{f^2(x_i, y_j)}{f(x_i)f(y_j)} - 1 \right)$$

$$0 \leq \chi^2 \leq n(\min(h, k) - 1)$$

Per ottenere un indice compreso tra zero e uno, dove zero indica la perfetta indipendenza tra due caratteri e uno la perfetta dipendenza, normalizziamo il  $\chi^2$ :

$$\chi^2_{\text{normalizzato}} = \frac{\chi^2}{n(\min(h, k) - 1)}$$

Dato un certo numero di punti su un piano ci proponiamo di trovare un metodo che consenta di determinare se questi punti sono linearmente correlati e di determinare la retta che eventualmente li correla.



Dati gli  $n$  punti  $P_i(x_i, y_i)$  si ha:

$$\text{media ascisse: } \bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}, \text{ varianza: } \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$\text{media ordinate: } \bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{n}, \text{ varianza: } \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \bar{y})^2}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{n} - \bar{y}^2$$

$$\text{retta interpolante: } y = mx + q \rightarrow \bar{y} = m\bar{x} + q$$

$$\text{varianza sulle } y_{teoriche} - y_{dati}: \sigma^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - (mx_i + q))^2}{n}$$

$$\begin{aligned} \text{covarianza: } \sigma_{xy} &= \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i - x_i \bar{y} - \bar{x} y_i + \bar{x} \bar{y}}{n} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{n} - \bar{y} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} - \bar{x} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{n} + \bar{x} \bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{n} - \bar{x} \bar{y} \end{aligned}$$



Vogliamo che la retta di regressione renda minima la varianza sulla differenza tra le  $y_{teoriche}$  e le  $y_{dati}$ , deve cioè essere minima la quantità:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (mx_i + q))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - q)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n (m^2 x_i^2 + 2mqx_i - 2mx_i y_i + q^2 - 2qy_i + y_i^2) =$$

ricordando che  $q = \bar{y} - m\bar{x}$ :

$$= \sum_{i=1}^n (\bar{x}^2 m^2 - 2\bar{x}m^2 x_i + m^2 x_i^2 - 2\bar{x}\bar{y}m + 2\bar{x}m y_i + 2\bar{y}m x_i - 2m x_i y_i + \bar{y}^2 - 2\bar{y}y_i + y_i^2) =$$

ricordando che

$$\sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}, \quad \sum_{i=1}^n y_i = n\bar{y}, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = n\sigma_x^2 + n\bar{x}^2, \quad \sum_{i=1}^n y_i^2 = n\sigma_y^2 + n\bar{y}^2$$
$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = n\sigma_{xy} + n\bar{x}\bar{y}$$

si ottiene:

$$= \sigma_x^2 n m^2 - 2\sigma_{xy} n m + n\sigma_y^2$$

il polinomio di secondo grado in  $m$  assume valore minimo per:

$$m = \frac{2\sigma_{xy}n}{2\sigma_x^2 n} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

La retta che meglio interpola i dati è la retta:

$$y = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}x + \bar{y} - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\bar{x}$$

oppure:

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$$

Una possibile misura della bontà della linearità della distribuzione di punti di cui abbiamo ricavato la retta di regressione può essere data dalla varianza sulla differenza tra  $y$  teoriche e quelle dei dati, che per la  $m$  della retta di regressione diventa:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\sigma_x^2 n \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\right)^2 - 2\sigma_{xy} n \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\right) + n\sigma_y^2}{n} = \\ &= -\frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} + \sigma_y^2 = \frac{\sigma_y^2 \sigma_x^2 - \sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2}\end{aligned}$$

La relazione  $\sigma^2 = \frac{\sigma_y^2 \sigma_x^2 - \sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2}$  ci permette di ricavare:

$$\frac{\sigma_y^2 \sigma_x^2 - \sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} \geq 0 \rightarrow \sigma_{xy}^2 \leq \sigma_y^2 \sigma_x^2 \rightarrow$$

$$-\sigma_y \sigma_x \leq \sigma_{xy} \leq \sigma_y \sigma_x$$

- vi è perfetta linearità se  $\sigma^2 = 0 \rightarrow \sigma_{xy} = \pm \sigma_y \sigma_x$
- i punti da cui si ricava la retta di regressione sono sempre più lontani da una distribuzione lineare al crescere di  $\sigma^2$  cioè per  $\sigma_{xy}^2 = 0$ .

Per quanto detto possiamo definire un coefficiente, detto di correlazione lineare, come:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y \sigma_x} \rightarrow -1 \leq r \leq 1$$

e da questo definiamo anche il coefficiente di determinazione come:

$$r^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^2 \sigma_x^2} \rightarrow 0 \leq r^2 \leq 1$$

- vi è perfetta linearità se  $r^2 = 1$
- i punti da cui si ricava la retta di regressione sono molto lontani da una distribuzione lineare se  $r^2 = 0$ .