Matematica

Appunti di Matematica 4

Michele prof. Perini

IISS Copernico Pasoli - Liceo Scientifico

A.S. 2024-2025

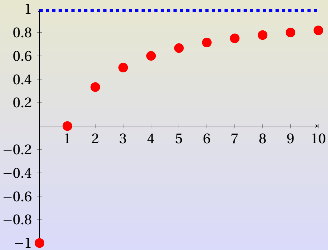
- Definizione assiomatica
- Formula di Bayes
- Legge dei grandi numeri

[1] nei complessi vale il seguente importante teorema (qui solamente enunciato) che estende la versione sui numeri reali, detta debole

Limite di una successione, simbologia

Il limite di una successione s_n, se esiste, si indica con il simbolo:

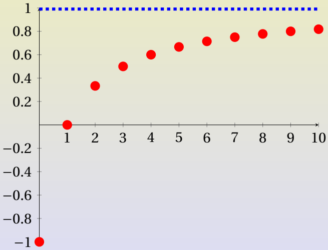
$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \begin{cases} +\infty \\ l \in \mathbb{R} \\ -\infty \end{cases}$$



$$\lim_{n \to +\infty} s_n = l \in \mathbb{R}$$

Il limite di una successione è un numero reale l se

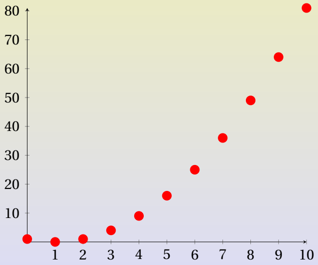
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \overline{n} : |s_n - l| < \varepsilon,\ \forall n > \overline{n}$$



$$\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$$

Il limite di una successione è $+\infty$ se

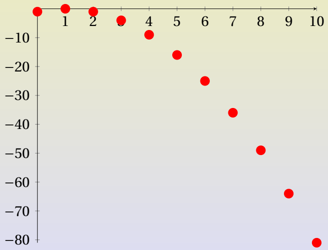
$$\forall M > 0,\ \exists \overline{n} : s_n > M,\ \forall n > \overline{n}$$



$$\lim_{n \to +\infty} s_n = -\infty$$

Il limite di una successione è $-\infty$ se

$$\forall M > 0,\ \exists \overline{n} : s_n < -M,\ \forall n > \overline{n}$$



ATTENZIONE: la definizione di limite di una successione formalizza il concetto di avvicinamento del valore della successione al limite al crescere di n ma non fornisce alcuna indicazione su come sia possibile determinare il valore del limite. La definizione di limite di successione permette di dimostrare le seguenti proprietà/teoremi e verificare l'esattezza del risultato di un dato limite.

Alcune proprietà e teoremi sui limiti:

Unicità del limite: il limite di una successione, se esiste, è unico.

Alcune proprietà e teoremi sui limiti:

Unicità del limite: il limite di una successione, se esiste, è unico.

Teorema della permanenza del segno: se $\lim_{n\to+\infty} a_n = l > 0$ allora esiste $\overline{n}$ tale che $a_n > 0$, $\forall n > \overline{n}$.

Alcune proprietà e teoremi sui limiti:

Unicità del limite: il limite di una successione, se esiste, è unico.

Teorema della permanenza del segno: se $\lim_{n\to+\infty} a_n = l > 0$ allora esiste $\overline{n}$ tale che $a_n > 0$, $\forall n > \overline{n}$.

Teorema dei carabinieri: se $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to+\infty} c_n = l \in \mathbb{R}$ e $\forall n > \overline{n}$ si ha che $a_n \le b_n \le c_n$ allora $\lim_{n\to+\infty} b_n = l \in \mathbb{R}$.

Sintesi delle proprietà della somma tra limiti del tipo $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ per limiti finiti e infiniti (in tabella si riporta l'esisto di $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n)$):

$+$	$a \in \mathbb{R}$	$a = +\infty$	$a = -\infty$
$b \in \mathbb{R}$	$a + b$	$+\infty$	$-\infty$
$b = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$b = -\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Sintesi delle proprietà del prodotto tra limiti del tipo $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ per limiti finiti e infiniti (in tabella si riporta l'esisto di $\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n)$):

$\cdot$	$a>0$	$a=0$	$a<0$	$a=+\infty$	$a=-\infty$
$b>0$	ab	0	ab	$+\infty$	$-\infty$
$b=0$	0	0	0	?	?
$b<0$	ab	0	ab	$-\infty$	$+\infty$
$b=+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$b=-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Sintesi delle proprietà del quoziente tra limiti del tipo $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ per limiti finiti e infiniti (con $b_n \neq 0\ \forall n > \overline{n}$, in tabella si riporta l'esisto di $\lim_{n\to+\infty}(a_n / b_n)$):

$/$	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$	$a = +\infty$	$a = -\infty$
$b > 0$	a/b	0	a/b	$+\infty$	$-\infty$
$b = 0$	∞	$?$	∞	∞	∞
$b < 0$	a/b	0	a/b	$-\infty$	$+\infty$
$b = +\infty$	0	0	0	$?$	$?$
$b = -\infty$	0	0	0	$?$	$?$

Verifica del limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]^2 = \overline{n}$$

l'ultima scrittura mostra che
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \overline{n} : \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon,\ \forall n > \overline{n}$.

[2] con le parentesi quadre si denota qui la funzione parte intera

Verifica del limite $\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n+1}=1,\ n\in\mathbb{N}$:

$$\left|\frac{n-1}{n+1}-1\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{-2}{n+1}\right|<\varepsilon$$

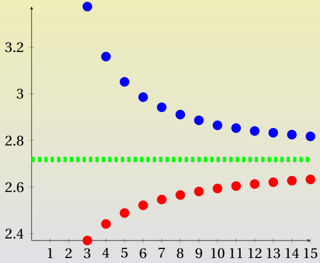
$$n>\frac{2}{\varepsilon}-1\geq\left[\frac{2}{\varepsilon}-1\right]^{3}=\overline{n},\ \varepsilon\leq 2$$

l'ultima scrittura mostra che
$\forall\varepsilon, 0<\varepsilon\leq 2,\ \exists\overline{n}:\left|\frac{n-1}{n+1}-1\right|<\varepsilon,\ \forall n>\overline{n}$.

[3] con le parentesi quadre si denota qui la funzione parte intera

Il numero di Nepero (e) è un numero trascendente definito come limite di particolari successioni[4]:

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} \approx 2,71828$$



[4] qui ci limitiamo a visualizzare le successioni ma queste consentono una dimostrazione formale dell'esistenza e unicità del numero di Nepero come loro limite.

Esponenziale naturale

La funzione esponenziale naturale si può definire come:

$$\exp(x) = e^{x}{}^{a} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

[a] questa notazione è giustificata dalle proprietà dell'esponenziale

La funzione esponenziale gode delle proprietà:

Esponenziale naturale

La funzione esponenziale naturale si può definire come:

$$\exp(x) = e^{x}\,[a] = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

[a] questa notazione è giustificata dalle proprietà dell'esponenziale

La funzione esponenziale gode delle proprietà:

1. $e^x > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Esponenziale naturale

La funzione esponenziale naturale si può definire come:

$$\exp(x) = e^{x}\,{}^{a} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

[a] questa notazione è giustificata dalle proprietà dell'esponenziale

La funzione esponenziale gode delle proprietà:

1. $e^x > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$
2. $e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} e^{x_2}$

Esponenziale naturale

La funzione esponenziale naturale si può definire come:

$$\exp(x) = e^{x}\,[a] = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

[a] questa notazione è giustificata dalle proprietà dell'esponenziale

La funzione esponenziale gode delle proprietà:

1. $e^x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$
2. $e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$
3. $e^0 = 1$

Esponenziale naturale

La funzione esponenziale naturale si può definire come:

$$\exp(x) = e^{x} \text{[a]} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

[a] questa notazione è giustificata dalle proprietà dell'esponenziale

La funzione esponenziale gode delle proprietà:

1. $e^x > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$
2. $e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} e^{x_2}$
3. $e^0 = 1$
4. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

Esponenziale naturale

La funzione esponenziale naturale si può definire come:

$$\exp(x) = e^{x}\,[a] = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$$

[a] questa notazione è giustificata dalle proprietà dell'esponenziale

La funzione esponenziale gode delle proprietà:

1. $e^x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$
2. $e^{x_1+x_2} = e^{x_1} e^{x_2}$
3. $e^0 = 1$
4. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
5. $e^x \geq x+1,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Esponenziale naturale

La funzione esponenziale naturale si può definire come:

$$\exp(x) = e^{x\,a} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

[a] questa notazione è giustificata dalle proprietà dell'esponenziale

La funzione esponenziale gode delle proprietà:

1. $e^x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$
2. $e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$
3. $e^0 = 1$
4. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
5. $e^x \geq x+1,\ \forall x \in \mathbb{R}$
6. $e^x \leq \frac{1}{1-x}$, se $x < 1$

Esponenziale naturale

La funzione esponenziale naturale si può definire come:

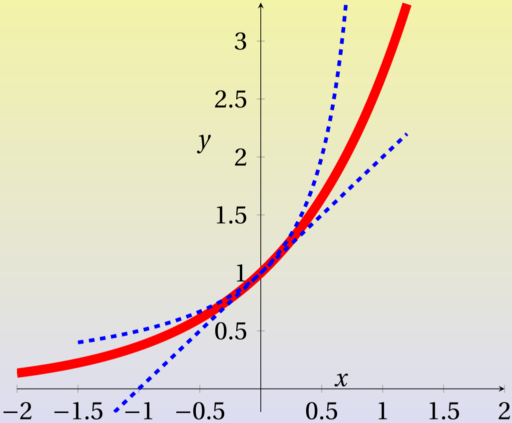
$$\exp(x) = e^{x\,a} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

[a] questa notazione è giustificata dalle proprietà dell'esponenziale

La funzione esponenziale gode delle proprietà:

1. $e^x > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$
2. $e^{x_1+x_2} = e^{x_1} e^{x_2}$
3. $e^0 = 1$
4. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
5. $e^x \geq x + 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$
6. $e^x \leq \frac{1}{1-x}$, se $x < 1$
7. $\forall x_1 < x_2 \rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$

Grafico della funzione esponenziale
$(y = e^x = \exp(x))$:



Logaritmo naturale

La funzione logaritmo naturale si può definire come inversa della funzione esponenziale naturale (l'esponenziale è una funzione biiettiva da $\mathbb{R}$ a $]0;+\infty[$) e si indica con la simbologia:

$$\ln(x) :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$$

come per tutte le funzioni e le loro inverse vale la relazione:

$$e^{\ln(x)} = \ln(e^x) = x$$

Sulla funzione logaritmo naturale così definita si possono dimostrare le seguenti proprietà:

1. $\ln(x) > 0,$ se $x > 1$

Sulla funzione logaritmo naturale così definita si possono dimostrare le seguenti proprietà:

1. $\ln(x) > 0, \text{ se } x > 1$
2. $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2),\ x_1 > 0 \wedge x_2 > 0$

Sulla funzione logaritmo naturale così definita si possono dimostrare le seguenti proprietà:

1. $\ln(x) > 0, \text{ se } x > 1$
2. $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2),\ x_1 > 0 \land x_2 > 0$
3. $\ln(1) = 0$

Sulla funzione logaritmo naturale così definita si possono dimostrare le seguenti proprietà:

1. $\ln(x) > 0, \text{ se } x > 1$
2. $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2), \ x_1 > 0 \wedge x_2 > 0$
3. $\ln(1) = 0$
4. $\ln\left(x^{-1}\right) = -\ln(x)$

Sulla funzione logaritmo naturale così definita si possono dimostrare le seguenti proprietà:

1. $\ln(x) > 0$, se $x > 1$
2. $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$, $x_1 > 0 \wedge x_2 > 0$
3. $\ln(1) = 0$
4. $\ln\left(x^{-1}\right) = -\ln(x)$
5. $\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$, se $x > 0$

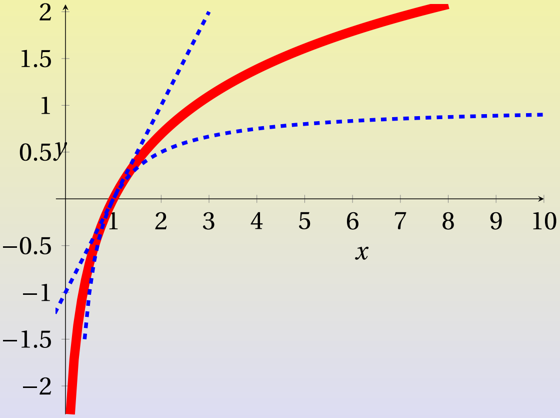
Sulla funzione logaritmo naturale così definita si possono dimostrare le seguenti proprietà:

1. $\ln(x) > 0, \text{ se } x > 1$
2. $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2),\ x_1 > 0 \wedge x_2 > 0$
3. $\ln(1) = 0$
4. $\ln\left(x^{-1}\right) = -\ln(x)$
5. $\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$, se $x > 0$
6. $\ln(x) \leq x - 1$, se $x > 0$

Sulla funzione logaritmo naturale così definita si possono dimostrare le seguenti proprietà:

1. $\ln(x) > 0, \text{ se } x > 1$
2. $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2), \; x_1 > 0 \wedge x_2 > 0$
3. $\ln(1) = 0$
4. $\ln\left(x^{-1}\right) = -\ln(x)$
5. $\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$, se $x > 0$
6. $\ln(x) \leq x - 1$, se $x > 0$
7. $\forall 0 < x_1 < x_2 \rightarrow \ln(x_1) < \ln(x_2)$

Grafico della funzione logaritmo naturale ($y = \ln(x)$):



Potenza ad esponente reale

Grazie ad esponenziali e logaritmi naturali possiamo definire per $x > 0$ e $k \in \mathbb{R}$ le potenze ad esponente reale come:

$$x^k = e^{k \ln(x)}$$

Utilizzando la definizione data possiamo verificare la validità delle consuete proprietà delle potenze (con esponente non più solamente razionale ma reale e $x, y > 0$):

Potenze ad esponente reale

Potenza ad esponente reale

Grazie ad esponenziali e logaritmi naturali possiamo definire per $x > 0$ e $k \in \mathbb{R}$ le potenze ad esponente reale come:

$$x^k = e^{k \ln(x)}$$

Utilizzando la definizione data possiamo verificare la validità delle consuete proprietà delle potenze (con esponente non più solamente razionale ma reale e $x, y > 0$):

- $x^0 = 1$

Potenze ad esponente reale

Potenza ad esponente reale

Grazie ad esponenziali e logaritmi naturali possiamo definire per $x > 0$ e $k \in \mathbb{R}$ le potenze ad esponente reale come:

$$x^k = e^{k \ln(x)}$$

Utilizzando la definizione data possiamo verificare la validità delle consuete proprietà delle potenze (con esponente non più solamente razionale ma reale e $x, y > 0$):

- $x^0 = 1$
- $x^{a+b} = x^a x^b$

Potenze ad esponente reale

Potenza ad esponente reale

Grazie ad esponenziali e logaritmi naturali possiamo definire per $x > 0$ e $k \in \mathbb{R}$ le potenze ad esponente reale come:

$$x^k = e^{k\ln(x)}$$

Utilizzando la definizione data possiamo verificare la validità delle consuete proprietà delle potenze (con esponente non più solamente razionale ma reale e $x, y > 0$):

- $x^0 = 1$
- $x^{a+b} = x^a x^b$
- $(xy)^k = x^k y^k$

Potenza ad esponente reale

Grazie ad esponenziali e logaritmi naturali possiamo definire per $x > 0$ e $k \in \mathbb{R}$ le potenze ad esponente reale come:

$$x^k = e^{k \ln(x)}$$

Utilizzando la definizione data possiamo verificare la validità delle consuete proprietà delle potenze (con esponente non più solamente razionale ma reale e $x, y > 0$):

- $x^0 = 1$
- $x^{a+b} = x^a x^b$
- $(xy)^k = x^k y^k$
- $(x^a)^b = x^{ab}$

Esponenziali a^x con $a > 0$

Definiamo l'esponenziale a base reale positiva come:

$$a^x = e^{x\ln(a)},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Esponenziali e logaritmi

Esponenziali a^x con $a > 0$

Definiamo l'esponenziale a base reale positiva come:

$$a^x = e^{x \ln(a)}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Logaritmi $\log_a(x)$ con $0 < a < 1 \vee a > 1$

Definiamo la funzione logaritmo a base reale come:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}, \text{ se } x > 0$$

Esponenziali e logaritmi

Così definite le funzioni esponenziale e logaritmo a base a risultano inverse, per esse infatti vale (per $0 < a < 1 \vee a > 1$ e $x > 0$):

$$a^{\log_a(x)} = \log_a(a^x) = x$$

su di loro valgono anche le proprietà (con a, b, c tali da rispettare l'esistenza di esponenziali e logaritmi):

- $\log_a(b^c) = c \log_a(b)$

Così definite le funzioni esponenziale e logaritmo a base a risultano inverse, per esse infatti vale (per $0 < a < 1 \vee a > 1$ e $x > 0$):

$$a^{\log_a(x)} = \log_a(a^x) = x$$

su di loro valgono anche le proprietà (con a, b, c tali da rispettare l'esistenza di esponenziali e logaritmi):

- $\log_a(b^c) = c\log_a(b)$
- $\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$

$$a^x = b$$

C.E.: $\forall x \in \mathbb{R},\ a > 0$

$$e^{x\ln(a)} = b$$

se $b > 0$:

$$\ln(e^{x\ln(a)}) = \ln(b)$$

$$x\ln(a) = \ln(b)$$

se $b \leq 0$:

$$\nexists x \in \mathbb{R}$$

- se $a \neq 1 \to x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$

$$a^x = b$$

C.E.: $\forall x \in \mathbb{R},\ a > 0$

$$e^{x\ln(a)} = b$$

se $b > 0$:

$$\ln(e^{x\ln(a)}) = \ln(b)$$

$$x\ln(a) = \ln(b)$$

se $b \leq 0$:

$$\nexists x \in \mathbb{R}$$

- se $a \neq 1 \rightarrow x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$
- se
  $a = 1 \wedge b = 1 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

$$a^x = b$$

C.E.: $\forall x \in \mathbb{R},\ a > 0$

$$e^{x\ln(a)} = b$$

se $b > 0$:

$$\ln(e^{x\ln(a)}) = \ln(b)$$

$$x\ln(a) = \ln(b)$$

se $b \leq 0$:

$$\nexists x \in \mathbb{R}$$

- se $a \neq 1 \rightarrow x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$
- se $a = 1 \land b = 1 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
- se $a = 1 \land b \neq 1 \rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

$$a^x > b$$

C.E.: $\forall x \in \mathbb{R},\ a > 0$

$$e^{x\ln(a)} > b$$

se $b > 0$:

$$\ln(e^{x\ln(a)}) > \ln(b)$$

$$x\ln(a) > \ln(b)$$

se $b \le 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

- se $0 < a < 1 \rightarrow x < \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$

$$a^x > b$$

C.E.: $\forall x \in \mathbb{R},\ a > 0$

$$e^{x\ln(a)} > b$$

se $b > 0$:

$$\ln(e^{x\ln(a)}) > \ln(b)$$

$$x\ln(a) > \ln(b)$$

se $b \leq 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

- se $0 < a < 1 \rightarrow x < \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$
- se $a > 1 \rightarrow x > \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$

$$a^x > b$$

C.E.: $\forall x \in \mathbb{R},\ a > 0$

$$e^{x\ln(a)} > b$$

se $b > 0$:

$$\ln(e^{x\ln(a)}) > \ln(b)$$

$$x\ln(a) > \ln(b)$$

se $b \leq 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

- se $0 < a < 1 \rightarrow x < \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$
- se $a > 1 \rightarrow x > \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$
- se $a = 1 \rightarrow 0 > \ln(b)$

$$a^x < b$$

C.E.: $\forall x \in \mathbb{R},\ a > 0$

$$e^{x \ln(a)} < b$$

se $b > 0$:

$$\ln(e^{x \ln(a)}) < \ln(b)$$

$$x \ln(a) < \ln(b)$$

se $b \leq 0$:

$$\nexists x \in \mathbb{R}$$

- se $0 < a < 1 \rightarrow x > \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$

$$a^x < b$$

C.E.: $\forall x \in \mathbb{R},\ a > 0$

$$e^{x\ln(a)} < b$$

se $b > 0$:

$$\ln(e^{x\ln(a)}) < \ln(b)$$

$$x\ln(a) < \ln(b)$$

se $b \leq 0$:

$$\nexists x \in \mathbb{R}$$

- se $0 < a < 1 \rightarrow x > \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$
- se $a > 1 \rightarrow x < \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$

$$a^x < b$$

C.E.: $\forall x \in \mathbb{R},\ a > 0$

$$e^{x\ln(a)} < b$$

se $b > 0$:

$$\ln(e^{x\ln(a)}) < \ln(b)$$

$$x\ln(a) < \ln(b)$$

- se $0 < a < 1 \rightarrow x > \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$
- se $a > 1 \rightarrow x < \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$
- se $a = 1 \rightarrow 0 < \ln(b)$

se $b \leq 0$:

$$\nexists x \in \mathbb{R}$$

$$\log_a(x) = b$$

C.E.: $x > 0,\ 0 < a < 1 \vee a > 1$

$$\frac{\ln(x)}{\ln(a)} = b$$

$$\ln(x) = b\ln(a)$$

$$e^{\ln(x)} = e^{b\ln(a)}$$

$$x = a^b$$

$$\log_a(x) > b$$

C.E.: $x > 0,\ 0 < a < 1 \vee a > 1$

$$\frac{\ln(x)}{\ln(a)} > b$$

$$\ln(x) > b\ln(a)$$

$$e^{\ln(x)} > e^{b\ln(a)}$$

$$x > a^b$$

$$\log_a(x) < b$$

C.E.: $x > 0,\ 0 < a < 1 \vee a > 1$

$$\frac{\ln(x)}{\ln(a)} < b$$

$$\ln(x) < b\ln(a)$$

$$e^{\ln(x)} < e^{b\ln(a)}$$

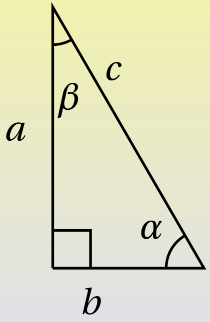
$$x < a^b$$

tenendo conto delle C.E.:

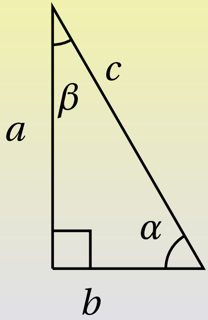
$$0 < x < a^b$$

Relazioni lato-angolo in un triangolo rettangolo:

Relazioni lato-angolo in un triangolo rettangolo:



Relazioni lato-angolo in un triangolo rettangolo:



$$a = c \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\beta$$

$$b = c \cdot \sin\beta = c \cdot \cos\alpha$$

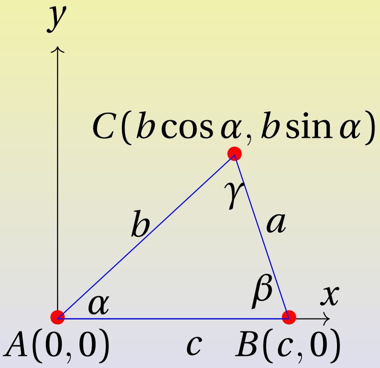
$$c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\cos\beta} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{b}{\cos\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$

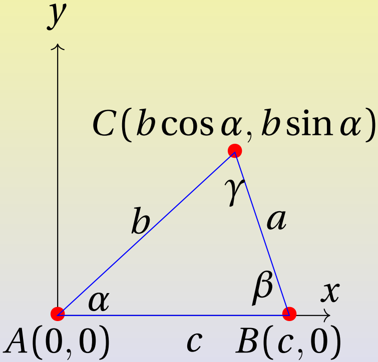
$$\tan\beta = \frac{b}{a}$$

Per un triangolo qualsiasi posizionato come in figura si ottiene una relazione che permette di ottenere l'area del triangolo ABC.

Per un triangolo qualsiasi posizionato come in figura si ottiene una relazione che permette di ottenere l'area del triangolo ABC.



Per un triangolo qualsiasi posizionato come in figura si ottiene una relazione che permette di ottenere l'area del triangolo ABC.



$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} b\cos\alpha \\ b\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'area del triangolo ABC si può ottenere dalla relazione qui sotto dimostrata ($b > 0$, $c > 0$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, $\sin\alpha \geq 0$):

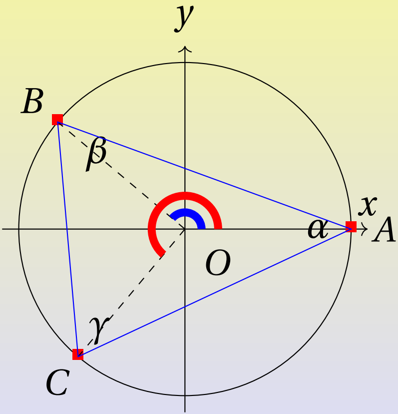
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} x_B y_C = \frac{1}{2} b c \sin\alpha$$

In conclusione:

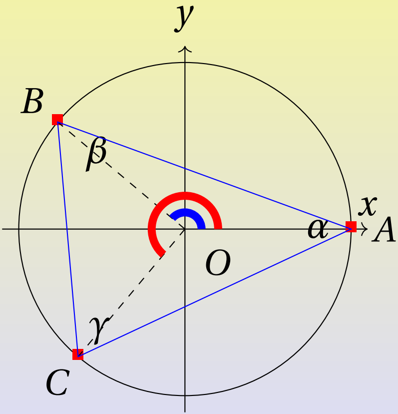
$$\boxed{S_{ABC} = \frac{1}{2} b c \sin\alpha}$$

Ogni triangolo può essere inscritto in una circonferenza, scegliamo di inserirne uno ABC come in figura.

Ogni triangolo può essere inscritto in una circonferenza, scegliamo di inserirne uno ABC come in figura.



Ogni triangolo può essere inscritto in una circonferenza, scegliamo di inserirne uno ABC come in figura.



$$0 < v < w < 2\pi$$

$$O(0,0),\ A(r,0),$$

$$B(r\cos(v), r\sin(v)),$$

$$C(r\cos(w), r\sin(w))$$

$$\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \frac{\pi - v}{2}$$

$$\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \frac{\pi - (w - v)}{2}$$

$$\widehat{OCA} = \widehat{OAC} = \frac{\pi - (2\pi - w)}{2}$$

$$\widehat{AOB} = v,\ \widehat{AOC} = w,\ \widehat{OCA} = \widehat{OAC} = \frac{w-\pi}{2},$$

$$\alpha = \frac{\pi - v}{2} + \frac{w-\pi}{2} = \frac{w-v}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi - v}{2} + \frac{\pi-(w-v)}{2} = \frac{2\pi - w}{2}$$

$$\gamma = \frac{\pi-(w-v)}{2} + \frac{w-\pi}{2} = \frac{v}{2}$$

Le ultime tre relazioni dimostrano che l'angolo al centro è doppio rispetto all'angolo alla circonferenza e che tutti gli angoli alla circonferenza di una corda di data lunghezza sono uguali tra loro. Infatti γ dipende solo da v che dipende solo dalla lunghezza di $AB = c$, così anche per α e β che dipendono solo dalle corde $BC = a$ e $CA = b$.

$$AB = c = r\sqrt{(\cos(v)-1)^2+(\sin(v))^2} =$$

$$= r\sqrt{\cos(v)^2+\sin(v)^2+1-2\cos(v)} =$$

$$= 2r\sqrt{\frac{1-\cos(v)}{2}} = 2r\sin\left(\frac{v}{2}\right) = 2r\sin(\gamma)$$

in sintesi:

$$\boxed{c = 2r\sin(\gamma)}$$

$$AC = b = r\sqrt{(\cos(w)-1)^2+(\sin(w))^2} =$$

$$= r\sqrt{\cos(w)^2+\sin(w)^2+1-2\cos(w)} =$$

$$= 2r\sqrt{\frac{1-\cos(w)}{2}} = 2r\sin\left(\frac{w}{2}\right) = 2r\sin\left(\pi-\frac{w}{2}\right) =$$

$$= 2r\sin\left(\frac{2\pi-w}{2}\right) = 2r\sin(\beta)$$

in sintesi:

$$\boxed{b = 2r\sin(\beta)}$$

$$BC = a = r\sqrt{(\cos(w)-\cos(v))^2+(\sin(w)-\sin(v))^2} =$$

$$= r\sqrt{2-2\cos(w)\cos(v)-2\sin(w)\sin(v)} =$$

$$= 2r\sqrt{\frac{1-(\cos(w)\cos(v)+\sin(w)\sin(v))}{2}} =$$

$$= 2r\sqrt{\frac{1-\cos(w-v)}{2}} = 2r\sin\left(\frac{w-v}{2}\right) = 2r\sin(\alpha)$$

in sintesi:

$$\boxed{a = 2r\sin(\alpha)}$$

Tenendo conto di quanto ottenuto possiamo enunciare i seguenti teoremi.

Teorema della corda

La misura di una corda di una circonferenza è pari al prodotto della misura del diametro della circonferenza per il seno dell'angolo alla circonferenza che insiste sulla corda.

Tenendo conto di quanto ottenuto possiamo enunciare i seguenti teoremi.

Teorema della corda

La misura di una corda di una circonferenza è pari al prodotto della misura del diametro della circonferenza per il seno dell'angolo alla circonferenza che insiste sulla corda.

Teorema dei seni

In un triangolo con lati di misura a, b, c, con angoli opposti rispettivamente α, β e γ vale la relazione:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

I teoremi della corda e dei seni si possono sintetizzare in un solo teorema.

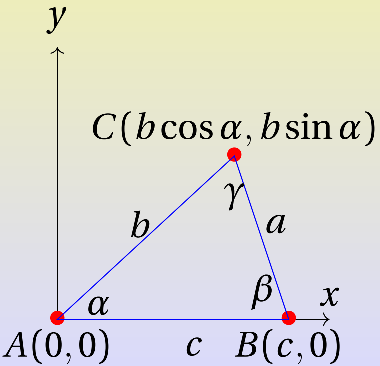
Teorema dei seni e della corda

In un triangolo con lati di misura a, b, c, con angoli opposti rispettivamente α, β e γ e inscritto in una circonferenza di raggio r, vale la relazione:

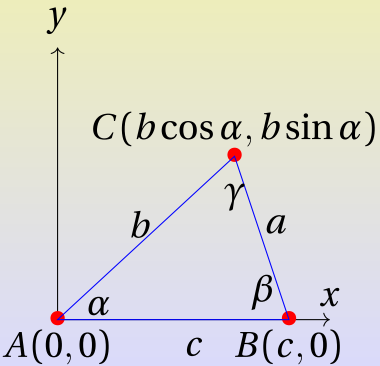
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r$$

Inseriamo un triangolo in un piano cartesiano per ottenere un teorema che è l'estensione ad un triangolo qualsiasi del teorema di Pitagora (il teorema del coseno è noto anche come teorema di Carnot).

Inseriamo un triangolo in un piano cartesiano per ottenere un teorema che è l'estensione ad un triangolo qualsiasi del teorema di Pitagora (il teorema del coseno è noto anche come teorema di Carnot).



Inseriamo un triangolo in un piano cartesiano per ottenere un teorema che è l'estensione ad un triangolo qualsiasi del teorema di Pitagora (il teorema del coseno è noto anche come teorema di Carnot).



$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} b\cos\alpha \\ b\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} b\cos\alpha - c \\ b\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Tenendo conto del fatto che
$a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ 0 \leq \alpha \leq \pi,\ \sin\alpha \geq 0)$:

$$a = \left|\vec{BC}\right|$$

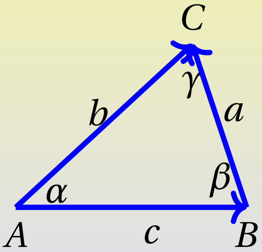
$$a^2 = \vec{BC}^2 = (b\cos\alpha - c)^2 + (b\sin\alpha)^2 =$$
$$= b^2\cos^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\sin^2\alpha =$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

In conclusione:

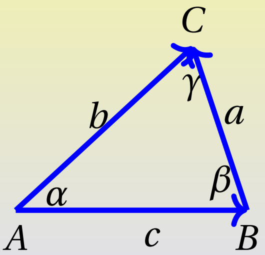
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

Grazie al teorema di Carnot è possibile ridefinire il prodotto scalare nei termini del modulo dei vettori moltiplicati e dell'angolo tra essi compreso.

Grazie al teorema di Carnot è possibile ridefinire il prodotto scalare nei termini del modulo dei vettori moltiplicati e dell'angolo tra essi compreso.



Grazie al teorema di Carnot è possibile ridefinire il prodotto scalare nei termini del modulo dei vettori moltiplicati e dell'angolo tra essi compreso.



$$\left|\vec{AB}\right| = c$$

$$\left|\vec{BC}\right| = a$$

$$\left|\vec{AC}\right| = b$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$
$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$$
$$\left(\vec{BC}\right)^2 = \left(\vec{AC} - \vec{AB}\right)^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB}$$

confrontando quest'ultima scrittura con il teorema di Carnot su ABC, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$, si può ottenere la relazione:

$$\vec{AC} \cdot \vec{AB} = bc\cos(\alpha) = \left|\vec{AC}\right| \cdot \left|\vec{AB}\right| \cos(\alpha)$$

In generale il prodotto scalare tra due vettori è il prodotto del modulo dei vettori per il coseno dell'angolo tra essi compreso.

Prodotto scalare

Il prodotto scalare tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tra cui è compreso l'angolo γ si può scrivere anche come:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos(\gamma)$$

Affinità

Una affinità è una trasformazione lineare biunivoca di punti del piano in altri punti del piano. Una affinità $\mathscr{A}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che trasforma punti di coordinate (x, y) in punti di coordinate (x', y') può essere descritta dal sistema di equazioni:

$$\mathscr{A}:\begin{cases} x' = ax + by + h \\ y' = cx + dy + s \end{cases}$$

con $ad - bc \neq 0$ affinché la trasformazione sia invertibile.

Una trasformazione lineare del piano può essere espressa tramite una matrice:

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la trasformazione inversa L^{-1} per cui si ha

$$LL^{-1} = L^{-1}L = 1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è la matrice:

$$L^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

affinché L sia invertibile deve essere $det(L) = ad - bc \neq 0$.

Affinità e matrici

In termini matriciali una affinità $\mathscr{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ può essere scritta come:

$$\mathscr{A} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix}$$

o anche:

$$\mathscr{A} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{T}$$

con $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una trasformazione lineare (invertibile con $det(L) = ad - bc \neq 0$) e $\vec{T} = \begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix}$ un vettore di traslazione.

Affinità dirette e inverse

Se $\mathscr{A}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è una affinità (con $= ad - bc \neq 0$):

$$\mathscr{A}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix}$$

la sua inversa è:

$$\mathscr{A}^{-1}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L^{-1} \begin{pmatrix} x' - h \\ y' - s \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' - h \\ y' - s \end{pmatrix}$$

Prodotto tra matrici (o prodotto riga per colonna):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+cf & be+df \\ ag+ch & bg+dh \end{pmatrix}$$

il prodotto tra matrici è in generale non commutativo e può essere pensato come l'applicazione di due trasformazioni lineari, una dopo l'altra.

Giustificazione della definizione del prodotto tra matrici:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (ae+cf)x+(be+df)y \\ (ag+ch)x+(bg+dh)y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ae+cf & be+df \\ ag+ch & bg+dh \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Trasformazione lineare: $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ■ → ■

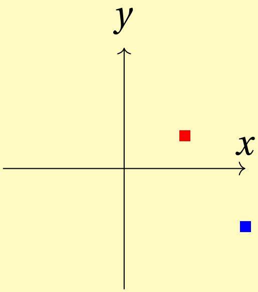
Affinché L sia biunivoca deve essere $det(L) \neq 0$.

Trasformazione lineare: $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\blacksquare \longrightarrow \blacksquare$

Affinché L sia biunivoca deve essere $det(L) \neq 0$.

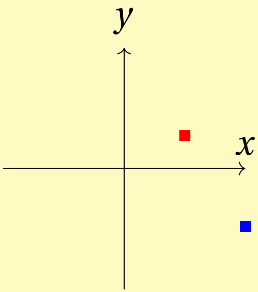
Trasformazione lineare: $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ■ ⟶ ■

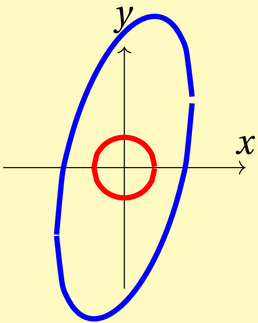
Affinché L sia biunivoca deve essere $det(L) \neq 0$.

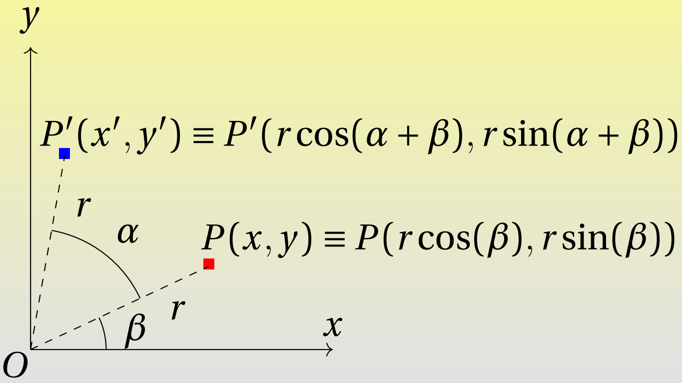


Trasformazione lineare: $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

Affinché L sia biunivoca deve essere $det(L) \neq 0$.






y
$P'(x', y') \equiv P'(r\cos(\alpha+\beta), r\sin(\alpha+\beta))$
r
α
$P(x, y) \equiv P(r\cos(\beta), r\sin(\beta))$
r
β
x
O

$$P(x,y) \to P'(x',y')$$

$$P(r\cos(\beta), r\sin(\beta)) \to P'(r\cos(\alpha+\beta), r\sin(\alpha+\beta))$$

$$P'(r\cos(\alpha)\cos(\beta) - r\sin(\alpha)\sin(\beta), r\sin(\alpha)\cos(\beta) + r\cos(\alpha)\sin(\beta))$$

$$P'(x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha), x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha))$$

$$R: \begin{cases} x' = x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) \\ y' = x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) \end{cases}$$

Rotazione: $R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, ■ ⟶ ■

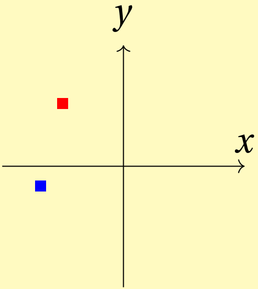
$$det(R) = \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$$

Rotazione: $R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, ■ ⟶ ■

$$det(R) = \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$$

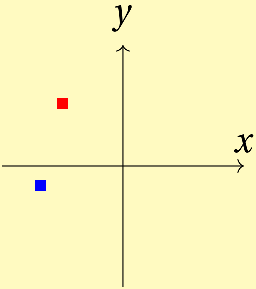
Rotazione: $R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, ■ ⟶ ■

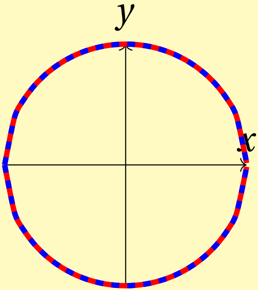
$$det(R) = \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$$



Rotazione: $R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, ■ ⟶ ■

$$det(R) = \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$$





$$R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

si ha:

$$RR^{-1} = R^{-1}R = 1_2$$

Una similitudine diretta di rapporto k può essere pensata come la composizione di una rotazione, una trasformazione identica e una omotetia:

$$S = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k\cos(\alpha) & -k\sin(\alpha) \\ k\sin(\alpha) & k\cos(\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Similitudine diretta di rapporto k:

$$S = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \blacksquare \longrightarrow \blacksquare$$

$$det(S) = a^2 + b^2 = k^2 \neq 0.$$

Similitudine diretta di rapporto k:

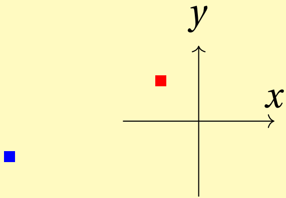
$$S = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \blacksquare \longrightarrow \blacksquare$$

$$det(S) = a^2 + b^2 = k^2 \neq 0.$$

Similitudine diretta di rapporto k:

$$S = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \textcolor{red}{\blacksquare} \longrightarrow \textcolor{blue}{\blacksquare}$$

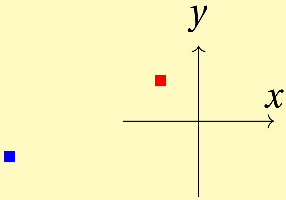
$$det(S) = a^2 + b^2 = k^2 \neq 0.$$

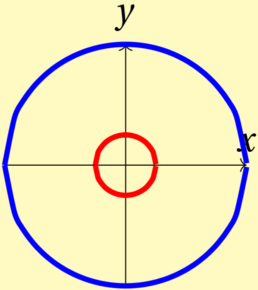


Similitudine diretta di rapporto k:

$$S = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \blacksquare \longrightarrow \blacksquare$$

$$det(S) = a^2 + b^2 = k^2 \neq 0.$$





Una similitudine invertente di rapporto k può essere pensata come la composizione di una rotazione, una simmetria rispetto alla retta $y = x$ e una omotetia:

$$S = k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k\sin(\alpha) & k\cos(\alpha) \\ k\cos(\alpha) & -k\sin(\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

Similitudine invertente di rapporto k:

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad \blacksquare \longrightarrow \blacksquare$$

$$det(S) = -a^2 - b^2 = -k^2 \neq 0.$$

Similitudine invertente di rapporto k:

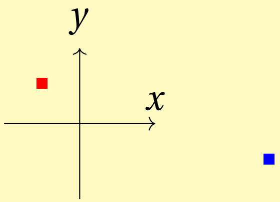
$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad \blacksquare \longrightarrow \blacksquare$$

$$det(S) = -a^2 - b^2 = -k^2 \neq 0.$$

Similitudine invertente di rapporto k:

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad \blacksquare \longrightarrow \blacksquare$$

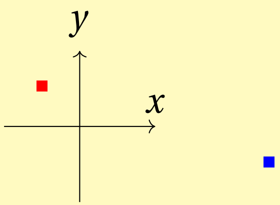
$$det(S) = -a^2 - b^2 = -k^2 \neq 0.$$

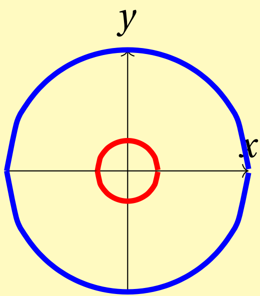


Similitudine invertente di rapporto k:

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad \textcolor{red}{\blacksquare} \longrightarrow \textcolor{blue}{\blacksquare}$$

$$det(S) = -a^2 - b^2 = -k^2 \neq 0.$$





Una isometria diretta può essere pensata come la composizione di una rotazione e una trasformazione identica:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Isometria diretta: $I = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, ■ → ■

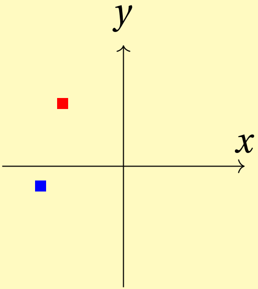
$$det(I) = a^2 + b^2 = 1.$$

Isometria diretta: $I = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, ■ $\longrightarrow$ ■

$det(I) = a^2 + b^2 = 1.$

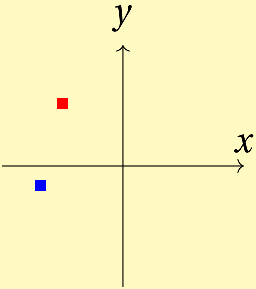
Isometria diretta: $I = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$,

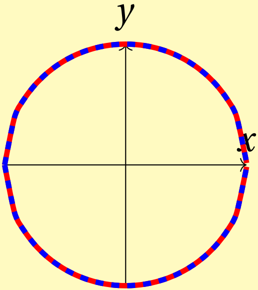
$$det(I) = a^2 + b^2 = 1.$$



Isometria diretta: $I = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, ■ ⟶ ■

$$det(I) = a^2 + b^2 = 1.$$





Una isometria invertente può essere pensata come la composizione di una rotazione e una simmetria rispetto alla retta $y = x$:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

Isometria invertente: $I = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, $\blacksquare \longrightarrow \blacksquare$

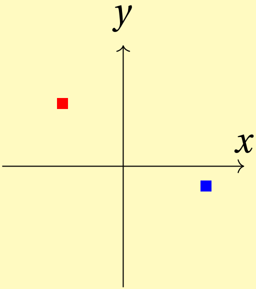
$det(I) = -a^2 - b^2 = -1.$

Isometria invertente: $I = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, $\blacksquare \longrightarrow \blacksquare$

$det(I) = -a^2 - b^2 = -1.$

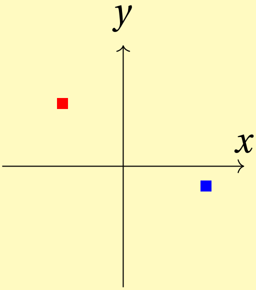
Isometria invertente: $I = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, ■ $\longrightarrow$ ■

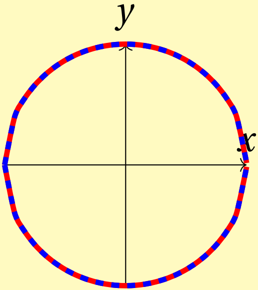
$det(I) = -a^2 - b^2 = -1.$



Isometria invertente: $I = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, ■ $\longrightarrow$ ■

$det(I) = -a^2 - b^2 = -1.$





L'equazione generale di una conica (eventualmente degenere) è:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ci proponiamo di determinare una possibile rotazione che porti l'equazione generale in una del tipo $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ che sappiamo classificare.

Le equazioni della rotazione di nostro interesse e della sua inversa sono:

$$R: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$R^{-1}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Applichiamo la rotazione:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$\begin{gathered}A(\cos(\alpha)x' + \sin(\alpha)y')^2 + \\ +B(\cos(\alpha)x' + \sin(\alpha)y')(-\sin(\alpha)x' + \cos(\alpha)y') + \\ +C(-\sin(\alpha)x' + \cos(\alpha)y')^2 + D(\cos(\alpha)x' + \sin(\alpha)y') + \\ +E(-\sin(\alpha)x' + \cos(\alpha)y') + F = 0\end{gathered}$$

La conica trasformata ha equazione
$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$, con:

$$\begin{cases} A' = A\cos^2(\alpha) - B\cos(\alpha)\sin(\alpha) + C\sin^2(\alpha) \\ B' = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)(A-C) + B(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) \\ C' = A\sin^2(\alpha) + B\cos(\alpha)\sin(\alpha) + C\cos^2(\alpha) \end{cases}$$

applicando le formule di duplicazione e bisezione:

$$\begin{cases} A' = A\frac{1+\cos(2\alpha)}{2} - B\frac{\sin(2\alpha)}{2} + C\frac{1-\cos(2\alpha)}{2} \\ B' = \sin(2\alpha)(A-C) + B\cos(2\alpha) \\ C' = A\frac{1-\cos(2\alpha)}{2} + B\frac{\sin(2\alpha)}{2} + C\frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \end{cases}$$

Grazie alle scritture precedenti è possibile verificare (effettuando i calcoli) che risulta sempre:

$$B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$$

per $B' = 0$ come voluto si ricava:

$$A'C' = -\frac{B^2 - 4AC}{4}$$

per quanto visto sulle coniche con coefficiente del termine xy uguale a zero si ha:

Ellisse (ev. degenere) $A'C' > 0 \rightarrow B^2 - 4AC < 0$

Grazie alle scritture precedenti è possibile verificare (effettuando i calcoli) che risulta sempre:

$$B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$$

per $B' = 0$ come voluto si ricava:

$$A'C' = -\frac{B^2 - 4AC}{4}$$

per quanto visto sulle coniche con coefficiente del termine xy uguale a zero si ha:

Ellisse (ev. degenere) $A'C' > 0 \rightarrow B^2 - 4AC < 0$

Parabola (ev. degenere) $A'C' = 0 \rightarrow B^2 - 4AC = 0$

Grazie alle scritture precedenti è possibile verificare (effettuando i calcoli) che risulta sempre:

$$B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$$

per $B' = 0$ come voluto si ricava:

$$A'C' = -\frac{B^2 - 4AC}{4}$$

per quanto visto sulle coniche con coefficiente del termine xy uguale a zero si ha:

Ellisse (ev. degenere) $A'C' > 0 \rightarrow B^2 - 4AC < 0$

Parabola (ev. degenere) $A'C' = 0 \rightarrow B^2 - 4AC = 0$

Iperbole (ev. degenere) $A'C' < 0 \rightarrow B^2 - 4AC > 0$

$$\mathscr{C}: x^2 + 2xy - 3y^2 + 2x - y + 1 = 0$$
$$\mathscr{C}: (x+y)^2 - 4y^2 + 2x - y + 1 = 0$$

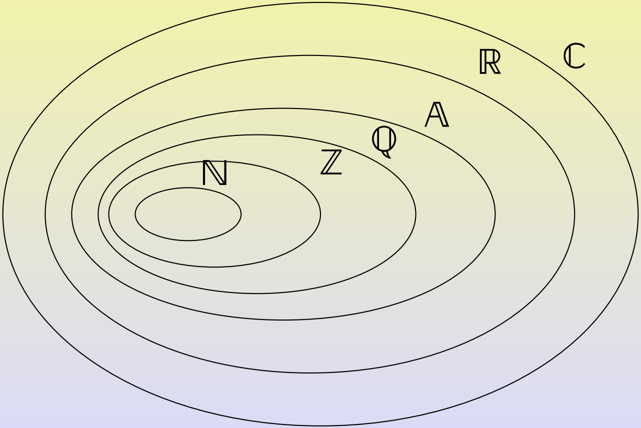
definiamo l'affinità:

$$\mathscr{A}: \begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2y \end{cases} \leftrightarrow \mathscr{A}^{-1}: \begin{cases} x = x' - \frac{1}{2}y' \\ y = \frac{1}{2}y' \end{cases}$$

$$\mathscr{C}': x'^2 - y'^2 + 2x' - \frac{3}{2}y' + 1 = 0$$
$$\mathscr{C}': (x'+1)^2 - \left(y' + \frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{9}{16}$$

$\mathbb{C}$ Numeri complessi

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$



I numeri complessi estendono l'insieme dei numeri reali. Un numero complesso è una coppia ordinata $a = (x, y)$ o $b = (v, w)$ sulla quale si definiscono le seguenti operazioni[5]:

Somma: $a + b = (x + v, y + w) = b + a$

[5] le operazioni definite sui complessi tornano ad essere le consuete sui reali se la seconda coordinata complessa è pari a 0

I numeri complessi estendono l'insieme dei numeri reali. Un numero complesso è una coppia ordinata $a=(x,y)$ o $b=(v,w)$ sulla quale si definiscono le seguenti operazioni[5]:

Somma: $a+b=(x+v,y+w)=b+a$

Prodotto: $ab=(xv-yw,xw+yv)=ba$

[5] le operazioni definite sui complessi tornano ad essere le consuete sui reali se la seconda coordinata complessa è pari a 0

I numeri complessi estendono l'insieme dei numeri reali. Un numero complesso è una coppia ordinata $a=(x,y)$ o $b=(v,w)$ sulla quale si definiscono le seguenti operazioni[5]:

Somma: $a+b=(x+v,y+w)=b+a$

Prodotto: $ab=(xv-yw,xw+yv)=ba$

Coniugato: $\overline{a}=(x,-y)$

[5] le operazioni definite sui complessi tornano ad essere le consuete sui reali se la seconda coordinata complessa è pari a 0

I numeri complessi estendono l'insieme dei numeri reali. Un numero complesso è una coppia ordinata $a = (x, y)$ o $b = (v, w)$ sulla quale si definiscono le seguenti operazioni[5]:

Somma: $a + b = (x + v, y + w) = b + a$

Prodotto: $ab = (xv - yw, xw + yv) = ba$

Coniugato: $\overline{a} = (x, -y)$

Modulo: $|a| = \sqrt{a\overline{a}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

[5] le operazioni definite sui complessi tornano ad essere le consuete sui reali se la seconda coordinata complessa è pari a 0

I numeri complessi estendono l'insieme dei numeri reali. Un numero complesso è una coppia ordinata $a=(x,y)$ o $b=(v,w)$ sulla quale si definiscono le seguenti operazioni[5]:

Somma: $a+b=(x+v,y+w)=b+a$

Prodotto: $ab=(xv-yw,xw+yv)=ba$

Coniugato: $\overline{a}=(x,-y)$

Modulo: $|a|=\sqrt{a\overline{a}}=\sqrt{x^2+y^2}$

Parte reale: $\Re(a)=x$

[5] le operazioni definite sui complessi tornano ad essere le consuete sui reali se la seconda coordinata complessa è pari a 0

I numeri complessi estendono l'insieme dei numeri reali. Un numero complesso è una coppia ordinata $a = (x, y)$ o $b = (v, w)$ sulla quale si definiscono le seguenti operazioni[5]:

Somma: $a + b = (x + v, y + w) = b + a$

Prodotto: $ab = (xv - yw, xw + yv) = ba$

Coniugato: $\overline{a} = (x, -y)$

Modulo: $|a| = \sqrt{a\overline{a}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

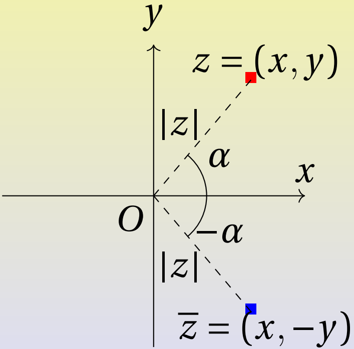
Parte reale: $\Re(a) = x$

Parte immaginaria: $\Im(a) = y$

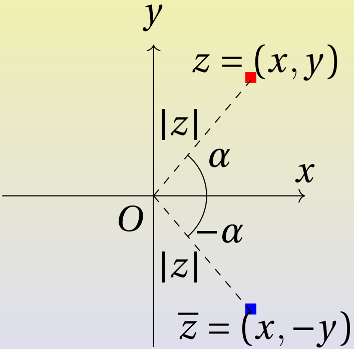
[5] le operazioni definite sui complessi tornano ad essere le consuete sui reali se la seconda coordinata complessa è pari a 0

Un numero complesso, in quanto coppia ordinata, può essere rappresentato su un piano cartesiano detto piano complesso o piano di Gauss.

Un numero complesso, in quanto coppia ordinata, può essere rappresentato su un piano cartesiano detto piano complesso o piano di Gauss.



Un numero complesso, in quanto coppia ordinata, può essere rappresentato su un piano cartesiano detto piano complesso o piano di Gauss.



$$z = (x, y)$$

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = |z|(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$$

I numeri complessi così definiti possono essere rappresentati con l'ausilio di un separatore tra la loro parte reale e quella immaginaria detta unità immaginaria. Si indica questo separatore con il simbolo i, l'unità immaginaria gode della proprietà $i^2 = -1$. Con questa simbologia sui complessi $a = x + iy$ e $b = v + iw$ le operazioni precedentemente definite diventano:

Somma: $a + b = x + iy + v + iw =$
$(x + v) + i(y + w) = b + a$

I numeri complessi così definiti possono essere rappresentati con l'ausilio di un separatore tra la loro parte reale e quella immaginaria detta unità immaginaria. Si indica questo separatore con il simbolo i, l'unità immaginaria gode della proprietà $i^2 = -1$. Con questa simbologia sui complessi $a = x + iy$ e $b = v + iw$ le operazioni precedentemente definite diventano:

Somma: $a + b = x + iy + v + iw = (x + v) + i(y + w) = b + a$

Prodotto: $ab = (x + iy)(v + iw) = xv + ixw + iyv - yw = (xv - yw) + i(xw + yv) = ba$

I numeri complessi così definiti possono essere rappresentati con l'ausilio di un separatore tra la loro parte reale e quella immaginaria detta unità immaginaria. Si indica questo separatore con il simbolo i, l'unità immaginaria gode della proprietà $i^2 = -1$. Con questa simbologia sui complessi $a = x + iy$ e $b = v + iw$ le operazioni precedentemente definite diventano:

Somma: $a + b = x + iy + v + iw = (x + v) + i(y + w) = b + a$

Prodotto: $ab = (x + iy)(v + iw) = xv + ixw + iyv - yw = (xv - yw) + i(xw + yv) = ba$

Coniugato: $\overline{a} = x - iy$

Calcoliamo il prodotto tra due numeri complessi
$a = |a|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ e
$b = |b|(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$:

$$ab = |a||b|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) =$$

$$= |a||b|(\cos(\alpha)\cos(\beta) + i\cos(\alpha)\sin(\beta) + i\sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)) =$$

$$= |a||b|(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i(\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta))) =$$

$$= |a||b|(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$$

Se $\alpha = 0$ si ottiene in particolare:

$$\cos(\alpha) + i\sin(\alpha) = \cos(0) + i\sin(0) = 1$$

Calcoliamo il reciproco di un complesso $a = |a|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$:

$$\frac{1}{a} = \frac{\overline{a}}{a\overline{a}} = \frac{\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)}{|a|(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha))} =$$

$$= \frac{1}{|a|}(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)) =$$

$$= \frac{1}{|a|}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$$

In sintesi i complessi $\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ e $\cos(\beta) + i\sin(\beta)$ godono delle proprietà:

- $(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$

Le medesime proprietà sono formalmente identiche a quelle che definiscono un particolare esponenziale:

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$$

In sintesi i complessi $\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ e $\cos(\beta) + i\sin(\beta)$ godono delle proprietà:

- $(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$
- $\cos(0) + i\sin(0) = 1$

Le medesime proprietà sono formalmente identiche a quelle che definiscono un particolare esponenziale:

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$$

In sintesi i complessi $\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ e $\cos(\beta) + i\sin(\beta)$ godono delle proprietà:

- $(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$
- $\cos(0) + i\sin(0) = 1$
- $\frac{1}{\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)} = (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^{-1} = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$

Le medesime proprietà sono formalmente identiche a quelle che definiscono un particolare esponenziale:

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$$

In sintesi i complessi $\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ e $\cos(\beta) + i\sin(\beta)$ godono delle proprietà:

- $(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$
- $\cos(0) + i\sin(0) = 1$
- $\frac{1}{\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)} = (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^{-1} = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$

Le medesime proprietà sono formalmente identiche a quelle che definiscono un particolare esponenziale:

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$$

- $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$

In sintesi i complessi $\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$ e $\cos(\beta)+i\sin(\beta)$ godono delle proprietà:

- $(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))(\cos(\beta)+i\sin(\beta)) = \cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$
- $\cos(0)+i\sin(0)=1$
- $\frac{1}{\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)} = (\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))^{-1} = \cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)$

Le medesime proprietà sono formalmente identiche a quelle che definiscono un particolare esponenziale:

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$$

- $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$
- $e^{i\cdot 0} = e^0 = 1$

In sintesi i complessi $\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$ e $\cos(\beta)+i\sin(\beta)$ godono delle proprietà:

- $(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))(\cos(\beta)+i\sin(\beta)) = \cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$
- $\cos(0)+i\sin(0)=1$
- $\frac{1}{\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)} = (\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))^{-1} = \cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)$

Le medesime proprietà sono formalmente identiche a quelle che definiscono un particolare esponenziale:

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$$

- $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$
- $e^{i\cdot 0} = e^0 = 1$
- $\frac{1}{e^{i\alpha}} = \left(e^{i\alpha}\right)^{-1} = e^{-i\alpha}$

In sintesi lo stesso numero complesso può essere scritto in forma:

di coppia ordinata: $z = (x, y)$

In sintesi lo stesso numero complesso può essere scritto in forma:

di coppia ordinata: $z = (x, y)$

algebrica: $z = x + iy$

In sintesi lo stesso numero complesso può essere scritto in forma:

di coppia ordinata: $z = (x, y)$

algebrica: $z = x + iy$

trigonometrica: $z = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ con $\tan(\alpha) = \frac{y}{x}$

In sintesi lo stesso numero complesso può essere scritto in forma:

di coppia ordinata: $z = (x, y)$

algebrica: $z = x + iy$

trigonometrica: $z = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ con $\tan(\alpha) = \frac{y}{x}$

esponenziale: $z = |z|\, e^{i\alpha}$ con $\tan(\alpha) = \frac{y}{x}$

Risolviamo le equazioni polinomiali del tipo $z^n = h$ nell'insieme dei numeri complessi, con $n \in \mathbb{N}_0$, $z, h \in \mathbb{C}$.

$$z^n = h$$

$$\left(|z|\, e^{i\alpha}\right)^n = |h|\, e^{i\beta}$$

$$|z|^n\, e^{in\alpha} = |h|\, e^{i\beta}$$

$$\begin{cases} |z|^n = |h| \\ e^{in\alpha} = e^{i\beta} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|h|} \\ n\alpha = \beta + 2k\pi \end{cases}$$

$$z = \sqrt[n]{|h|} e^{i\frac{\beta+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{|h|}\left(\cos\left(\frac{\beta+2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\beta+2k\pi}{n}\right)\right)$$

Esempio di equazione polinomiale nei complessi:

$$z^3 = 8$$

$$\left(|z|\, e^{i\alpha}\right)^3 = 8e^{i(0+2k\pi)}$$

$$|z|^3\, e^{i3\alpha} = 8e^{i(0+2k\pi)}$$

$$\begin{cases} |z|^3 = 8 \\ e^{i3\alpha} = e^{i(0+2k\pi)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |z| = 2 \\ \alpha = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

$$z = 2e^{i\frac{2k\pi}{3}} = \begin{cases} 2(\cos(0) + i\sin(0)) = 2 \text{ se } k = 0 \\ 2\left(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})\right) = -1 + i\sqrt{3} \text{ se } k = \\ 2\left(\cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3})\right) = -1 - i\sqrt{3} \text{ se } k = \end{cases}$$

$\mathbb{C}$ Numeri complessi Teorema fondamentale dell'algebra[6]

Una equazione polinomiale di grado n nell'insieme dei numeri complessi ha sempre n soluzioni z_s.

$$\sum_{k=0}^{n} c_k z^k = 0, \; c_n \neq 0$$

$$c_n (z - z_1)^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} \cdots (z - z_h)^{\alpha_h} = 0$$

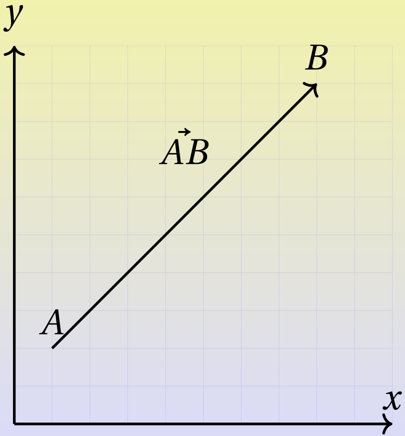
Gli α_s sono detti molteplicità delle soluzioni e indicano quante volte va conteggiata una data soluzione dell'equazione.

[6] nei complessi vale il seguente importante teorema (qui solamente enunciato) che estende la versione sui numeri reali, detta debole

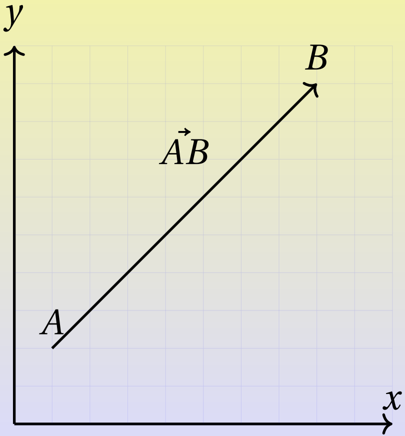
Definizione

Un vettore può essere definito come una ennupla ordinata sulla quale si definiscono le operazioni di prodotto scalare-vettore e di somma.

Un vettore può essere definito come una ennupla ordinata sulla quale si definiscono le operazioni di prodotto scalare-vettore e di somma.



Un vettore può essere definito come una ennupla ordinata sulla quale si definiscono le operazioni di prodotto scalare-vettore e di somma.



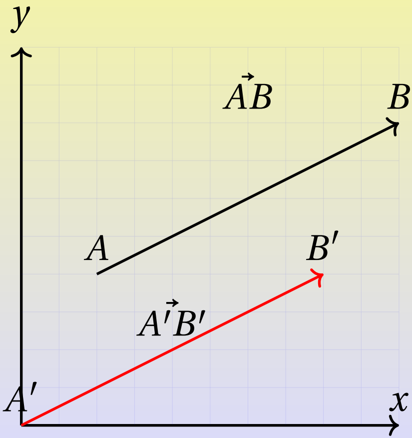
$$A\left(x_A, y_A, z_A\right)$$

$$B\left(x_B, y_B, z_B\right)$$

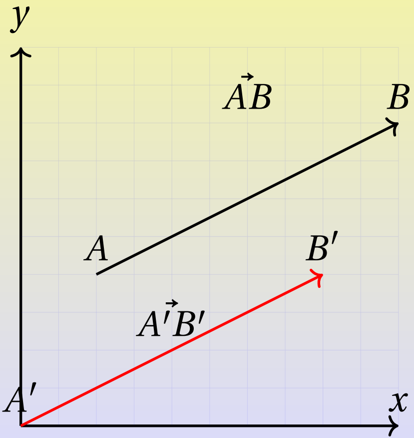
$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Due vettori sono equivalenti se hanno le medesime rispettive componenti. Due vettori equivalenti hanno lo stesso modulo, direzione e verso.

Due vettori sono equivalenti se hanno le medesime rispettive componenti. Due vettori equivalenti hanno lo stesso modulo, direzione e verso.



Due vettori sono equivalenti se hanno le medesime rispettive componenti. Due vettori equivalenti hanno lo stesso modulo, direzione e verso.



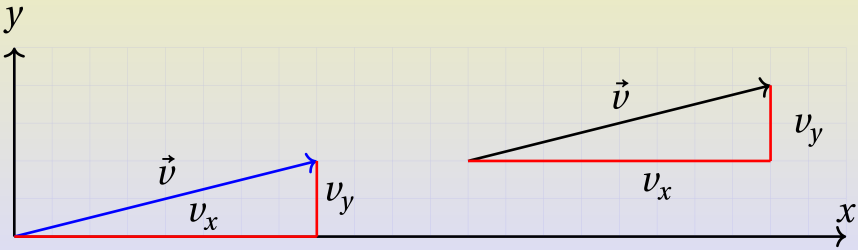
$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} =$$

$$= \vec{A'B'} = \begin{pmatrix} x_{B'} - x_{A'} \\ y_{B'} - y_{A'} \\ z_{B'} - z_{A'} \end{pmatrix}$$

Modulo di un vettore

Dato il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ il suo modulo è

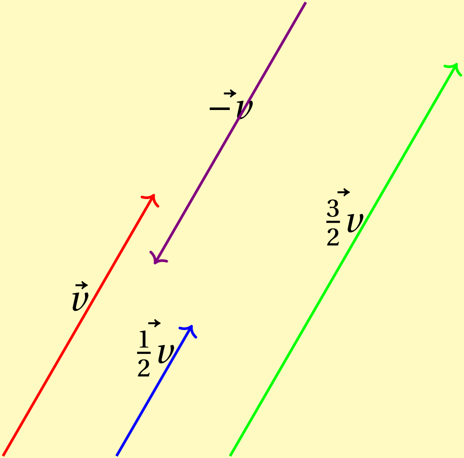
$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



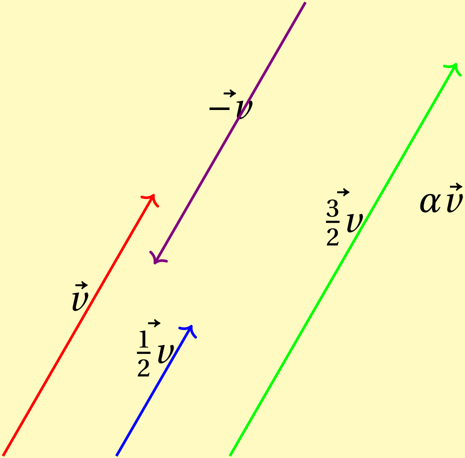
Prodotto scalare per vettore

Prodotto scalare per vettore

Prodotto scalare per vettore



Prodotto scalare per vettore



$$\alpha \vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_x \\ \alpha v_y \\ \alpha v_z \end{pmatrix}$$

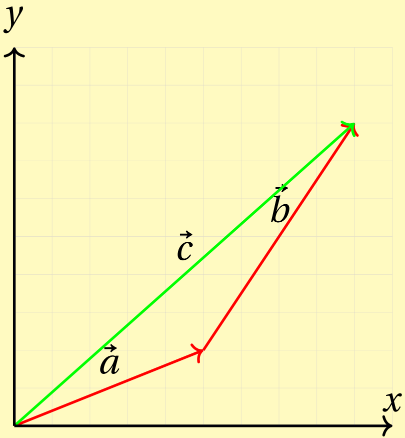
$$\left|\alpha \vec{v}\right| = |\alpha| \left|\vec{v}\right|$$

$$\vec{v} \parallel \alpha \vec{v}$$

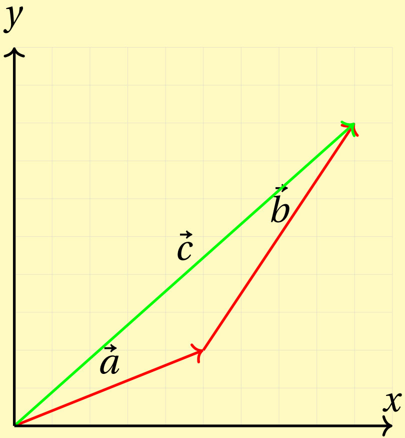
Somma tra vettori

Somma tra vettori

Somma tra vettori



Somma tra vettori



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

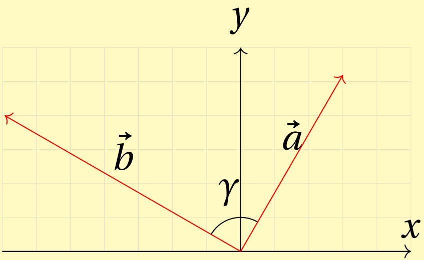
Prodotto scalare: definizione

L'ultima relazione si dimostra tramite il teorema di Carnot o teorema del coseno.

Prodotto scalare: definizione

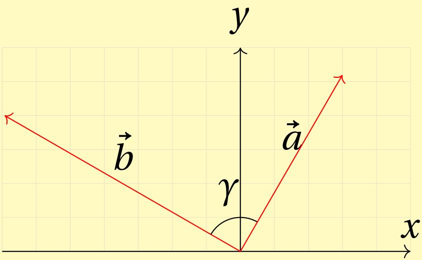
L'ultima relazione si dimostra tramite il teorema di Carnot o teorema del coseno.

Prodotto scalare: definizione



L'ultima relazione si dimostra tramite il teorema di Carnot o teorema del coseno.

Prodotto scalare: definizione



$$\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} =$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z =$$

$$= |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos(\gamma)$$

L'ultima relazione si dimostra tramite il teorema di Carnot o teorema del coseno.

Prodotto scalare: proprietà

Le proprietà possono essere facilmente dimostrate a partire dalla definizione, dimostriamo l'ultima:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\vec{a}|^2$$

Prodotto scalare: proprietà

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Le proprietà possono essere facilmente dimostrate a partire dalla definizione, dimostriamo l'ultima:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\vec{a}|^2$$

Prodotto scalare: proprietà

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
- $\vec{a}\cdot\left(k\vec{b}\right)=k\vec{b}\cdot\vec{a}$

Le proprietà possono essere facilmente dimostrate a partire dalla definizione, dimostriamo l'ultima:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}=a_x^2+a_y^2+a_z^2=|\vec{a}|^2$$

Prodotto scalare: proprietà

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot \left(k\vec{b}\right) = k\vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Le proprietà possono essere facilmente dimostrate a partire dalla definizione, dimostriamo l'ultima:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\vec{a}|^2$$

Prodotto scalare: proprietà

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot \left(k\vec{b}\right) = k\vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = a^2$

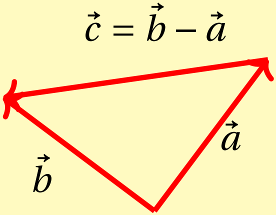
Le proprietà possono essere facilmente dimostrate a partire dalla definizione, dimostriamo l'ultima:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\vec{a}|^2$$

Prodotto scalare e perpendicolarità

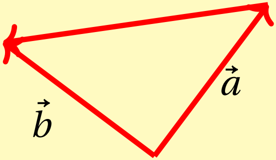
Prodotto scalare e perpendicolarità

Prodotto scalare e perpendicolarità



Prodotto scalare e perpendicolarità

$$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$$



Per il teorema di Pitagora si ha:

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = \left(\vec{b} - \vec{a}\right)^2$$

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Retta parallela al vettore $\vec{v}$ e passante per il punto $P(x_P, y_P, z_P)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\vec{v} + \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}$$

Due rette, nello spazio, definite rispettivamente dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono parallele se e solo se $\vec{v} \parallel \vec{w}$, sono perpendicolari se e solo se $\vec{v} \perp \vec{w}$.

Retta passante per il punto $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \\ z_A - z_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$$

Equazione cartesiana piano passante per $P(x_P, y_P, z_P)$ e perpendicolare al vettore $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \\ z - z_P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$a(x - x_P) + b(y - y_P) + c(z - z_P) = 0$$

Definizione di determinante di una matrice 3×3

$$det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} =$$

$$= \ldots$$

Prodotto vettoriale

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \end{vmatrix}$$

con $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Perpendicolarità

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{a} = 0 \leftrightarrow \vec{a} \perp \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{b} = 0 \leftrightarrow \vec{b} \perp \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

Basta eseguire i calcoli.

Anticommutatività

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$$

Basta verificare che data la definizione di prodotto vettoriale, ogni componente del vettore risultato cambia segno se si scambia a con b.

Modulo

É sufficiente verificare l'identità:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\gamma$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2 = \left(|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\gamma\right)^2$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2 = |\vec{a}|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 \cdot \sin^2\gamma$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2 = |\vec{a}|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 \cdot \left(1 - \cos^2\gamma\right)$$

$$\left(a_y b_z - a_z b_y\right)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)^2 =$$

$$= \left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right)^2 \cdot \left(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2\right)^2 - |\vec{a}|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 \cdot \cos^2\gamma$$

$$\dots$$

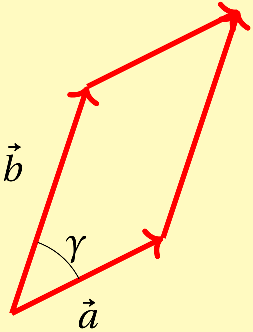
$$|\vec{a}|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 \cdot \cos^2\gamma = \left(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\right)^2$$

Il membri dell'ultima equazione rappresentano due espressioni equivalenti del prodotto scalare.

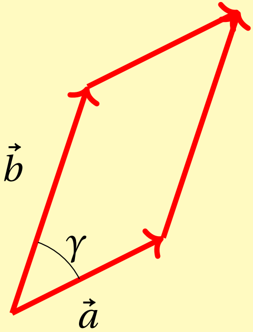
Aree dei parallelogrammi

Aree dei parallelogrammi

Aree dei parallelogrammi



Aree dei parallelogrammi

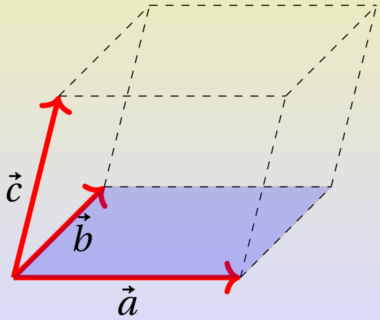


$$S = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \sin(\gamma) =$$

$$= \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

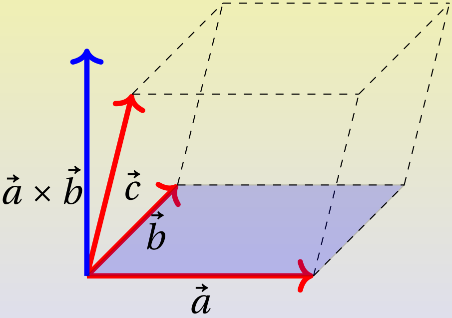
Parallelepipedo

Un parallelepipedo è una figura dello spazio le cui basi sono due parallelogrammi. Un parallelepipedo si può pensare come definito da tre vettori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nello spazio.



Volume del parallelepipedo

Il volume del parallelepipedo può essere determinato moltiplicando l'area di una base per l'altezza (una giustificazione di ciò sarà data tramite il principio di Cavalieri).



$$V = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right| = \left|det\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}\right|$$

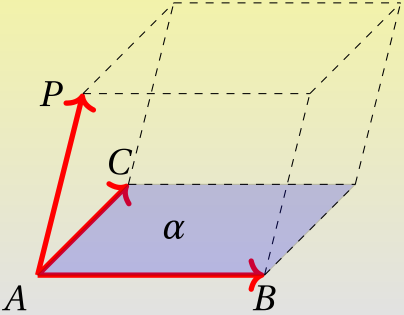
Determinanti e vettori paralleli:

Per quanto visto sul volume del parallelepipedo si può concludere che il determinante della matrice le cui colonne sono le componenti dei vettori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ è nullo se e solo se almeno due dei vettori sono paralleli.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \vee \vec{a} \parallel \vec{c} \vee \vec{c} \parallel \vec{b} \leftrightarrow det\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} = 0$$

Distanza tra piano α e punto P

$$A, B, C \in \alpha$$



$$d(P-\alpha) = \frac{\left| det \begin{pmatrix} \vec{AB} & \vec{AC} & \vec{AP} \end{pmatrix} \right|}{\left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right|}$$

Distanza tra piano α e punto $P(x_P, y_P, z_P)$, con equazione cartesiana del piano

$$Q(x_0, y_0, z_0) \in \alpha \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

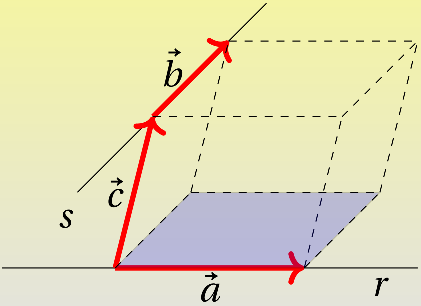
$$\rightarrow ax + by + cz + d = 0,\ d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$$

La distanza tra punto e piano è data dalla proiezione di $\vec{PQ}$ sulla direzione di $\vec{n}$:

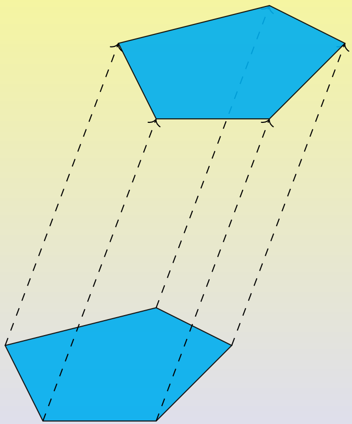
$$d(P-\alpha)=\frac{\left|\vec{n}\vec{QP}\right|}{|\vec{n}|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_P-x_0\\y_P-y_0\\z_P-z_0\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=$$

$$=\frac{|ax_P+by_P+cz_P+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

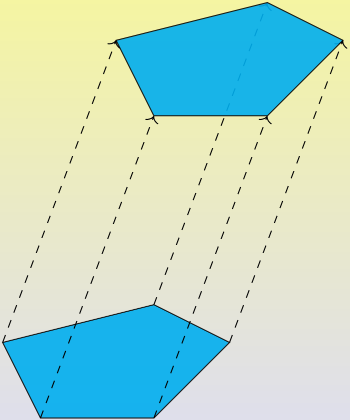
Siano r e s due rette non parallele definite dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e sia $\vec{c}$ un vettore che collega un punto su r con un punto su s.



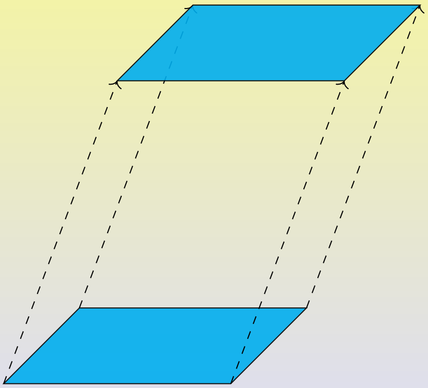
$$d(s-r) = \frac{\left|\vec{c}(\vec{a}\times\vec{b})\right|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|} = \frac{\left|det\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}\right|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}$$



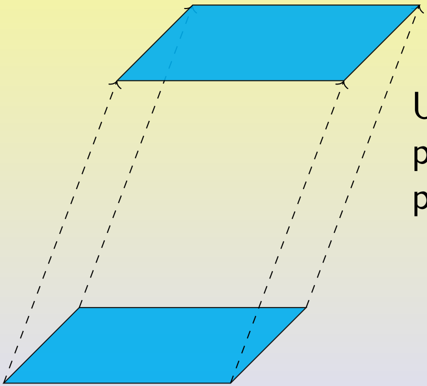
Prisma



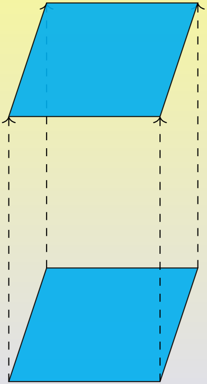
Un prisma è la figura solida la cui superficie è costituita da un poligono di base, giacente su un solo piano, un poligono traslato di una traslazione $\vec{v}$ rispetto a quello di base, i parallelogrammi che hanno come lati i lati del poligono di base e i loro rispettivi traslati di $\vec{v}$.



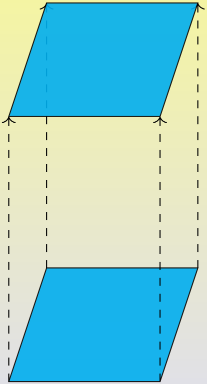
Parallelepipedo



Un parallelepipedo è un prisma le cui basi sono parallelogrammi.



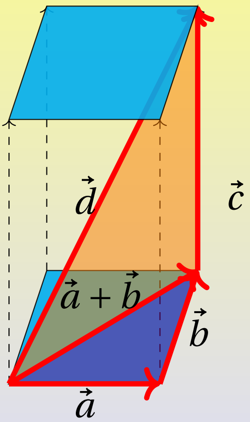
Parallelepipedo rettangolo



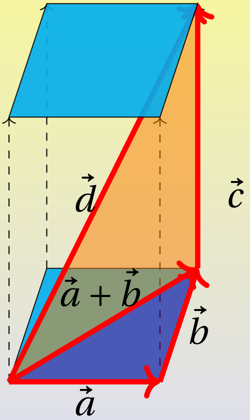
Un parallelepipedo rettangolo è un parallelepipedo le cui basi e superfici laterali sono rettangoli.

Solidi 3D Diagonale del parallelepipedo rettangolo

Solidi 3D Diagonale del parallelepipedo rettangolo



Solidi 3D Diagonale del parallelepipedo rettangolo

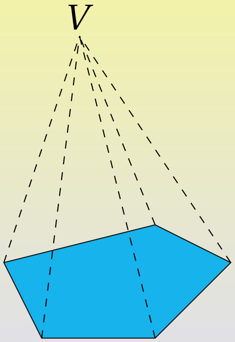


$$\vec{d}^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 + \vec{c}^2$$

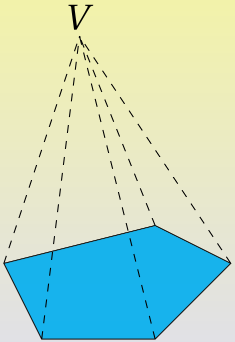
$$\vec{d}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$ [a]

[a] Questa relazione (ricavata con il teorema di Pitagora) giustifica la definizione di norma di un vettore tridimensionale come radice della somma dei quadrati delle tre componenti del vettore.

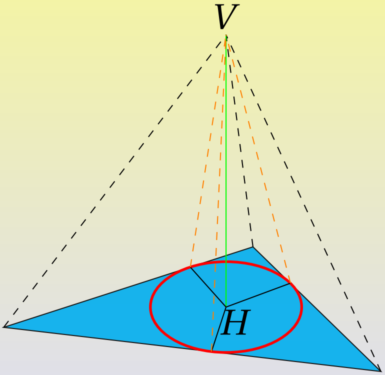

V

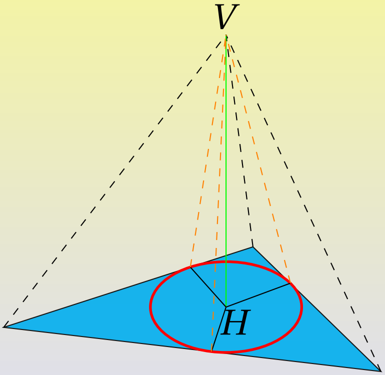
Piramide



Una piramide è la figura solida la cui superficie è costituita da un poligono di base, giacente su un solo piano, e dai triangoli formati da ogni lato del poligono e dalle coppie di segmenti che congiungono gli estremi di un certo lato ad un punto, esterno al poligono, detto vertice V.

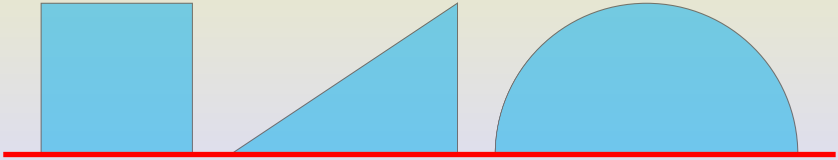
Piramide retta





Una piramide è retta se il poligono di base è circoscritto ad una circonferenza e il piede dell'altezza della piramide coincide con il centro di tale circonferenza. In questi solidi le altezze dei triangoli laterali (apotemi) sono tutte congruenti.

Cilindro: un cilindro si ottiene dalla rotazione completa di un rettangolo attorno ad un suo lato.
Cono: un cono si ottiene dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno ad un suo cateto.
Sfera: una sfera si ottiene dalla rotazione completa di un semicerchio attorno al suo diametro.



Solidi platonici

I solidi platonici sono figure solide le cui facce sono costituite da poligoni regolari tutti identici.

Se $n \geq 3$ è il numero dei lati di ogni poligono regolare di base (con angoli al vertice $\frac{\pi(n-2)}{n}$), le $c \geq 3$ facce che concorrono ad ogni vertice devono soddisfare la condizione angolare:

$$c \cdot \frac{\pi(n-2)}{n} < 2\pi \rightarrow n < \frac{2c}{c-2} \rightarrow n < 2 + \frac{4}{c-2}$$

le possibili soluzioni della disequazione sono:

- se $c = 3 \;\; n < 6 \rightarrow n = 3 \vee n = 4 \vee n = 5$

Solidi platonici

I solidi platonici sono figure solide le cui facce sono costituite da poligoni regolari tutti identici.

Se $n \geq 3$ è il numero dei lati di ogni poligono regolare di base (con angoli al vertice $\frac{\pi(n-2)}{n}$), le $c \geq 3$ facce che concorrono ad ogni vertice devono soddisfare la condizione angolare:

$$c \cdot \frac{\pi(n-2)}{n} < 2\pi \rightarrow n < \frac{2c}{c-2} \rightarrow n < 2 + \frac{4}{c-2}$$

le possibili soluzioni della disequazione sono:

- se $c = 3$ $n < 6 \rightarrow n = 3 \vee n = 4 \vee n = 5$
- se $c = 4$ $n < 4 \rightarrow n = 3$

Solidi platonici

I solidi platonici sono figure solide le cui facce sono costituite da poligoni regolari tutti identici.

Se $n \geq 3$ è il numero dei lati di ogni poligono regolare di base (con angoli al vertice $\frac{\pi(n-2)}{n}$), le $c \geq 3$ facce che concorrono ad ogni vertice devono soddisfare la condizione angolare:

$$c \cdot \frac{\pi(n-2)}{n} < 2\pi \rightarrow n < \frac{2c}{c-2} \rightarrow n < 2 + \frac{4}{c-2}$$

le possibili soluzioni della disequazione sono:

- se $c = 3$ $n < 6 \rightarrow n = 3 \vee n = 4 \vee n = 5$
- se $c = 4$ $n < 4 \rightarrow n = 3$
- se $c = 5$ $n < \frac{10}{3} \rightarrow n = 3$

I solidi platonici sono figure solide le cui facce sono costituite da poligoni regolari tutti identici.

Se $n \geq 3$ è il numero dei lati di ogni poligono regolare di base (con angoli al vertice $\frac{\pi(n-2)}{n}$), le $c \geq 3$ facce che concorrono ad ogni vertice devono soddisfare la condizione angolare:

$$c \cdot \frac{\pi(n-2)}{n} < 2\pi \rightarrow n < \frac{2c}{c-2} \rightarrow n < 2 + \frac{4}{c-2}$$

le possibili soluzioni della disequazione sono:

- se $c = 3$ $n < 6 \rightarrow n = 3 \vee n = 4 \vee n = 5$
- se $c = 4$ $n < 4 \rightarrow n = 3$
- se $c = 5$ $n < \frac{10}{3} \rightarrow n = 3$
- se $c > 5$ non ci sono n che soddisfano le condizioni

Gli unici 5 solidi platonici sono dunque:

$c = 3,\ n = 3$ **Tetraedro**: formato da 4 triangoli equilateri

Gli unici 5 solidi platonici sono dunque:

$c = 3,\ n = 3$ **Tetraedro**: formato da 4 triangoli equilateri

$c = 3,\ n = 4$ **Cubo**: formato da 6 quadrati

Gli unici 5 solidi platonici sono dunque:

$c = 3,\ n = 3$ **Tetraedro**: formato da 4 triangoli equilateri

$c = 3,\ n = 4$ **Cubo**: formato da 6 quadrati

$c = 3,\ n = 5$ **Dodecaedro**: formato da 12 pentagoni

Gli unici 5 solidi platonici sono dunque:

$c = 3,\ n = 3$ **Tetraedro**: formato da 4 triangoli equilateri

$c = 3,\ n = 4$ **Cubo**: formato da 6 quadrati

$c = 3,\ n = 5$ **Dodecaedro**: formato da 12 pentagoni

$c = 4,\ n = 3$ **Ottaedro**: formato da 8 triangoli equilateri

Gli unici 5 solidi platonici sono dunque:

$c = 3,\ n = 3$ **Tetraedro**: formato da 4 triangoli equilateri

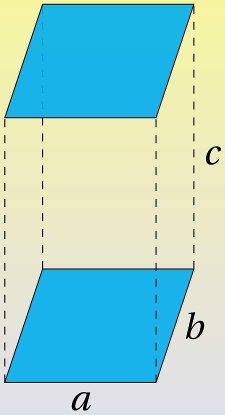
$c = 3,\ n = 4$ **Cubo**: formato da 6 quadrati

$c = 3,\ n = 5$ **Dodecaedro**: formato da 12 pentagoni

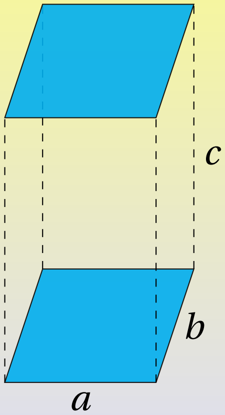
$c = 4,\ n = 3$ **Ottaedro**: formato da 8 triangoli equilateri

$c = 5,\ n = 3$ **Icosaedro**: formato da 20 triangoli equilateri

Parallelepipedo rettangolo



c
b
a



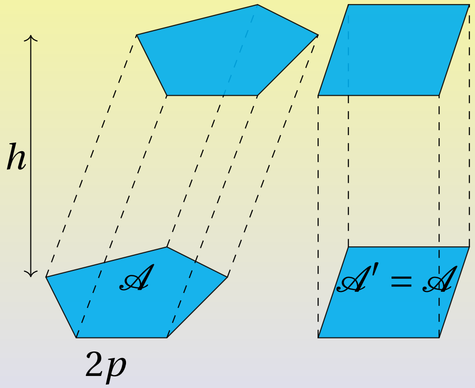
$$V = abc$$

$$S = 2(ab + ac + bc)$$

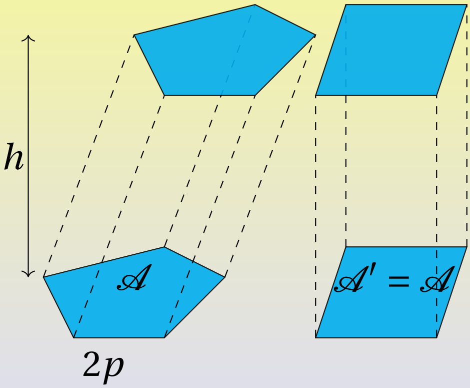
Assumiamo il seguente assioma:

Principio di Cavalieri

Se due solidi possono essere disposti rispetto ad un piano π, in modo che ogni piano parallelo a π, che intersechi uno dei due solidi intersechi anche l'altro e individui su di essi sezioni equivalenti, allora i due solidi hanno lo stesso volume.

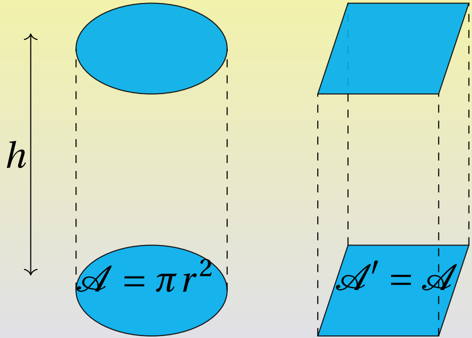

h
$\mathscr{A}$
$2p$
$\mathscr{A}' = \mathscr{A}$

Prisma

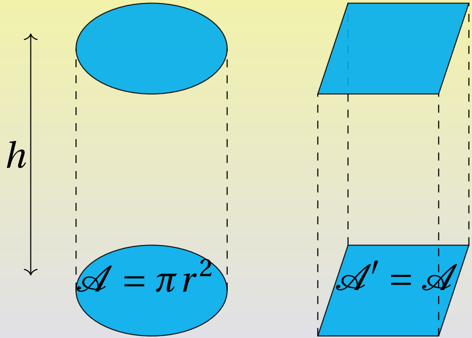


$$V = \mathscr{A}\,h$$

$$S = 2(\mathscr{A} + p\,h)$$

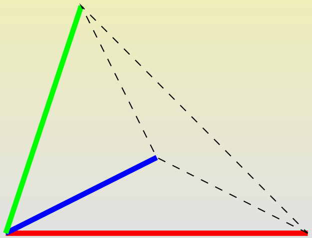

h
$\mathscr{A} = \pi r^2$
$\mathscr{A}' = \mathscr{A}$

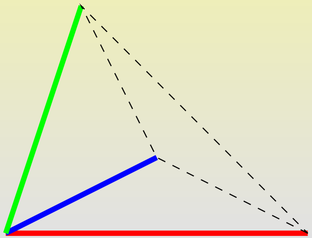
Cilindro

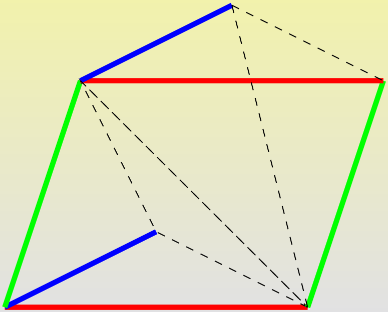


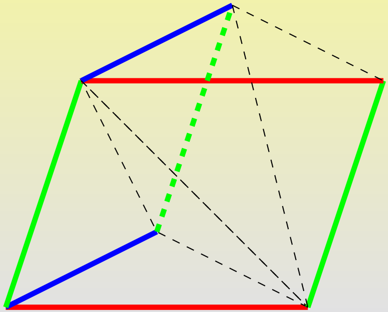
$$V = \pi r^2 h$$

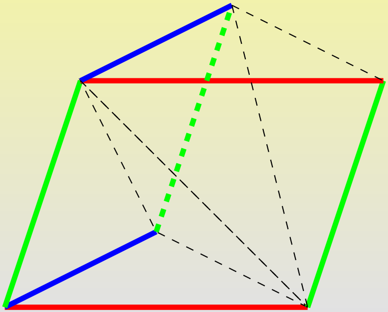
$$S = 2\pi(r^2 + rh)$$





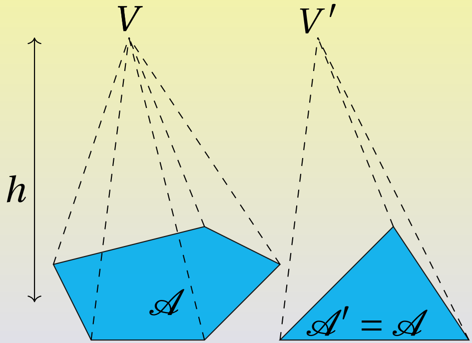


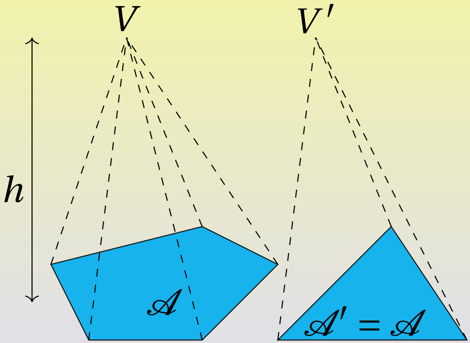




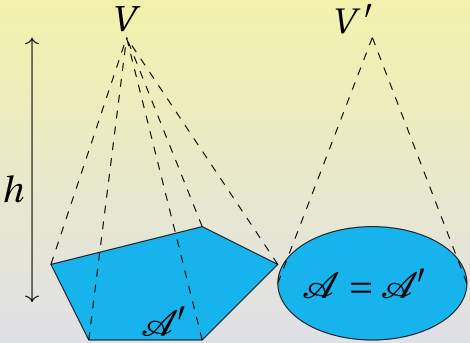
Il simplesso è una piramide con tutte le facce costituite da triangoli. Tre simplessi (equivalenti) come in figura formano un prisma a base triangolare. Scelta una base con area $\mathscr{A}$ e altezza h il volume del simplesso è pari a:

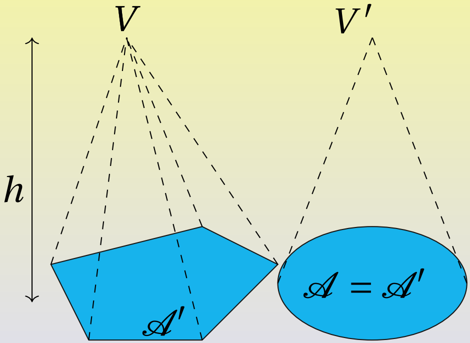
$$V = \frac{1}{3}\mathscr{A}h$$


V
V'
h
$\mathscr{A}$
$\mathscr{A}' = \mathscr{A}$

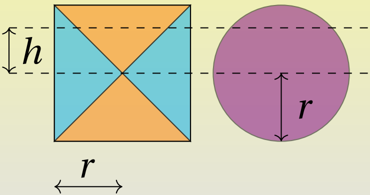


$$V = \frac{1}{3}\mathscr{A}\,h$$

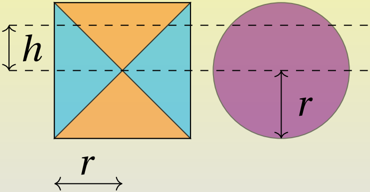

V
V'
h
$\mathscr{A}'$
$\mathscr{A} = \mathscr{A}'$



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



h
r
r



Sezioni sfera: $\pi(r^2 - h^2)$

Sezioni anticlessidra:

$\pi r^2 - \pi h^2$

$$V_{ac} = V$$

$$V = V_{ac} = V_{cil} - 2V_{cono} =$$

$$= \pi r^2(2r) - 2\frac{1}{3}\pi r^2 r =$$

$$= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Definizione ricorsiva: fattoriale

Con $n \in \mathbb{N}$:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{se} \quad n \neq 0 \end{cases}$$

Esempio:

$$4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$$

Il numero di permutazioni P_n di n oggetti (tutti distinti) è il numero delle sequenze ordinate che possono essere composte con tali oggetti.
Ipotizziamo di vole scrivere tutte le sequenze componibili con le lettere A, B e C:
ABC ACB BAC BCA CAB CBA
le sequenze si ottengono a partire da ognuno degli n oggetti seguiti da tutte le possibili permutazioni dei rimanenti $n-1$.
Per le permutazioni valgono la proprietà:
$P_n = n \cdot P_{n-1}$ e $P_1 = 1$, il che ci assicura che:

$$\boxed{P_n = n!} \ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Il numero di disposizioni $D_{n,k}$ di k oggetti distinti presi da un gruppo di n (tutti distinti) è il numero delle sequenze ordinate che possono essere composte con tali oggetti.
Per ottenere il numero delle disposizioni possiamo pensare di partire dalle permutazioni P_n degli n oggetti a disposizione. Ognuna delle sequenze è formata dai primi k elementi seguiti dai rimanenti $n-k$:

$$\underbrace{\underbrace{ABCDE}_{k}\underbrace{FGH}_{n-k}}_{n}$$

Ogni permutazione degli n oggetti è formata da una disposizione dei k oggetti ripetuta per il numero di permutazioni dei rimanenti $n-k$. Il numero delle disposizioni è dunque:

$$\boxed{D_{n,k} = \frac{P_n}{P_{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}} \ \forall n \geq k \wedge n.k \in \mathbb{N}_0$$

per $k = n$ le disposizioni diventano semplicemente le permutazioni degli n oggetti:

$$D_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! = P_n$$

Il numero di combinazioni $C_{n,k}$ di k oggetti distinti presi da un gruppo di n (tutti distinti) è il numero dei possibili insiemi che possono essere composti con tali oggetti.
Possiamo ricavare il numero delle combinazioni a partire da quello delle disposizioni $D_{n,k}$, per le combinazioni le $k!$ sequenze di k oggetti che contengono gli stessi elementi sono tra loro indistinguibili, si ha quindi:

$$\boxed{C_{n,k} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}} \quad \forall n \geq k \wedge n.k \in \mathbb{N}_0$$

Le permutazioni con ripetizione sono le permutazioni di n oggetti di cui almeno alcuni sono indistinguibili. Ipotizziamo di vole scrivere tutte le sequenze componibili con le lettere A, B e A e ipotizziamo in prima istanza di poter distinguere le lettere e disporre quindi A_1, B e A_2:
A_1BA_2 A_1A_2B BA_1A_2 BA_2A_1 A_2A_1B A_2BA_1 Il numero delle sequenze indistinguibili è pari alle possibili permutazioni degli elementi indistinguibili (nel nostro esempio le A).

Calcolo combinatorio Permutazioni con ripetizione

In generale se $e_1 + e_2 + \cdots + e_k = n$ sono il numero delle ripetizioni di ogni elemento distinto degli n complessivi, il numero delle permutazioni con ripetizione è dato da:

$$\boxed{P_n^R = \frac{P_n}{e_1! e_2! \cdots e_k!} = \frac{n!}{e_1! e_2! \cdots e_k!}}$$

con $e_1 + e_2 + \cdots + e_k = n \wedge n, e_1, e_2, \ldots, e_k \in \mathbb{N}_0$.

Le disposizioni con ripetizione sono le sequenze ordinate di k oggetti (anche identici) presi da un gruppo di n tutti distinguibili tra loro. Ognuno degli elementi della sequenza può essere scelto in n modi differenti per un totale di k elementi. Le disposizioni con ripetizione risultano quindi essere:

$$\boxed{D^R_{n,k} = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k \text{ volte}} = n^k} \ \forall n.k \in \mathbb{N}_0$$

Le combinazioni con ripetizione sono le sequenze non ordinate di k oggetti (anche identici) presi da un gruppo di n tutti distinguibili tra loro. Le sequenze si distinguono le une dalle altre per gli elementi che vi compaiono in relazione al numero di volte in cui compaiono.
Possiamo ipotizzare, per esemplificare, di formare le combinazioni dagli $n=2$ oggetti A e B presi a gruppi di $k=3$. Le possibili combinazioni sono date in questo caso dalle terne: AAA, AAB, ABB, BBB.

Calcolo combinatorio Combinazioni con ripetizione

Non contando l'ordine possiamo rappresentare quelle sequenze con due soli simboli: un * per il numero di ripetizioni di un dato elemento e una $|$ per separare i diversi elementi. Nel nostro caso le 4 sequenze precedenti diventano semplicemente: ***$|$, **$|$*, *$|$**, $|$***.

In generale il numero di * è pari a k mentre il numero di $|$ è pari a $n-1$. Le combinazioni con ripetizione risultano quindi essere:

$$\boxed{C^R_{n,k} = \frac{P_{n+k-1}}{k!(n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \binom{n+k-1}{k}} \; \forall n.k \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} a^{n-k} b^k}$$

Dimostriamo la formula del binomio di Newton per induzione. Per $n = 0$ la formula diventa $(a+b)^0 = \frac{0!}{0!0!} a^0 b^0$ che è vera $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Ora dimostriamo che se la formula è vera per n allora è vera anche per $n+1$ per tutti i naturali.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n =$$

$$= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}a^{n-k}b^{k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}a^{n-k+1}b^{k}+\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}a^{n-k}b^{k+1} =$$

$$= a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}a^{n-k+1}b^{k}+$$

$$+b^{n+1}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{(n-k)!k!}a^{n-k}b^{k+1} =$$

ponendo $j = k - 1 \rightarrow k = j + 1$ nella prima delle due sommatorie si ottiene:

$$= a^{n+1} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!(j+1)!} a^{n-j} b^{j+1} +$$

$$+ b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!k!} a^{n-k} b^{k+1} =$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} \right) a^{n-k} b^{k+1} =$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k-1)!k!} + \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) a^{n-k} b^{k+1} =$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k-1)!k!} \frac{n+1}{(k+1)(n-k)} a^{n-k} b^{k+1}$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} a^{n-k} b^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=-1}^{n} \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} a^{n-k} b^{k+1} =$$

poniamo $h = k+1 \rightarrow k = h-1$ e otteniamo:

$$= \sum_{h=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{(n-h+1)!(h)!} a^{n-h+1} b^h =$$

scriviamo nuovamente k al posto di h e raccogliamo i termini $n+1$:

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{((n+1)-k)!(k)!} a^{(n+1)-k} b^k = \sum_{k=0}^{n+1} \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} a^{(n+1)-}$$

l'ultima espressione è proprio il binomio di Newton per una potenza $n+1$. Abbiamo dimostrato che la formula del binomio è vera per $n=0$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ se è vera per n allora è vera anche per $n+1$; in definitiva la formula è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Nel dimostrare la formula del binomio di Newton abbiamo anche ricavato l'identità[7]:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

$$C_{n+1,k+1} = C_{n,k} + C_{n,k+1}$$

che è la proprietà alla base del funzionamento del triangolo di Tartaglia per la determinazione dei coefficienti dello sviluppo del binomio.

[7] per dimostrarla è sufficiente svolgere i calcoli sviluppando i fattoriali

$$
\begin{array}{c}
C_{0,0} \\
C_{1,0} \quad C_{1,1} \\
C_{2,0} \quad C_{2,1} \quad C_{2,2} \\
C_{3,0} \quad C_{3,1} \quad C_{3,2} \quad C_{3,3} \\
C_{4,0} \quad C_{4,1} \quad C_{4,2} \quad C_{4,3} \quad C_{4,4} \\
C_{5,0} \quad C_{5,1} \quad C_{5,2} \quad C_{5,3} \quad C_{5,4} \quad C_{5,5}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Definizione classica di probabilità

La probabilità di un evento casuale (aleatorio, stocastico) è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli al presentarsi dell'evento (k) e il numero totale dei casi possibili (n), purchè tutti i casi siano equiprobabili. In simboli:

$$p(E) = \frac{k}{n}$$

La definizione classica è operativa ma presenta delle problematiche formali. La definizione ad esempio non risulta applicabile nel caso vi siano infiniti casi e definisce la probabilità utilizzando il principio di equiprobabilità.

Evento

Un evento è un insieme che si associa ad un determinato esito di un esperimento aleatorio (casuale), indichiamo gli eventi con la notazione E_1, E_2, E_3, E_4, ...

Evento

Un evento è un insieme che si associa ad un determinato esito di un esperimento aleatorio (casuale), indichiamo gli eventi con la notazione E_1, E_2, E_3, E_4, ...

Evento elementare

Un evento elementare è un elemento $e \in E_i$.

Evento

Un evento è un insieme che si associa ad un determinato esito di un esperimento aleatorio (casuale), indichiamo gli eventi con la notazione E_1, E_2, E_3, E_4, ...

Evento elementare

Un evento elementare è un elemento $e \in E_i$.

Spazio campionario

Lo spazio campionario è un insieme che contiene tutti gli eventi relativi ad un esperimento aleatorio, in simboli $S = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup \dots$

Evento impossibile

Un evento impossibile è un evento associato ad un insieme vuoto $\emptyset$.

Evento impossibile

Un evento impossibile è un evento associato ad un insieme vuoto $\emptyset$.

Evento certo

Un evento certo è un evento associato all'intero spazio campionario S.

Evento impossibile

Un evento impossibile è un evento associato ad un insieme vuoto $\emptyset$.

Evento certo

Un evento certo è un evento associato all'intero spazio campionario S.

Eventi contrari

Due eventi E_i ed E_j si dicono contrari se $\overline{E_i} = S - E_i = E_j$.

Eventi incompatibili

Due eventi E_i ed E_j si dicono incompatibili se $E_i \cap E_j = \emptyset$.

Definizione assiomatica della probabilità

La probabilità di un evento E_i è il numero $p(E_i)$ associato univocamente all'evento che gode delle proprietà:

La definizione assiomatica della probabilità non dà indicazioni su come effettuare il calcolo della probabilità ma solo sulle proprietà ad essa associate. In effetti la modalità per associare un valore alla probabilità non è univoca.

Definizione assiomatica della probabilità

La probabilità di un evento E_i è il numero $p(E_i)$ associato univocamente all'evento che gode delle proprietà:

- $p(E_i) \geq 0$ per ogni i

La definizione assiomatica della probabilità non dà indicazioni su come effettuare il calcolo della probabilità ma solo sulle proprietà ad essa associate. In effetti la modalità per associare un valore alla probabilità non è univoca.

Definizione assiomatica della probabilità

La probabilità di un evento E_i è il numero $p(E_i)$ associato univocamente all'evento che gode delle proprietà:

- $p(E_i) \geq 0$ per ogni i
- $p(S) = 1$

La definizione assiomatica della probabilità non dà indicazioni su come effettuare il calcolo della probabilità ma solo sulle proprietà ad essa associate. In effetti la modalità per associare un valore alla probabilità non è univoca.

Definizione assiomatica della probabilità

La probabilità di un evento E_i è il numero $p(E_i)$ associato univocamente all'evento che gode delle proprietà:

- $p(E_i) \geq 0$ per ogni i
- $p(S) = 1$
- $p(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup \dots) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) + p(E_4) + \dots$ se gli eventi E_i sono tra loro tutti incompatibili

La definizione assiomatica della probabilità non dà indicazioni su come effettuare il calcolo della probabilità ma solo sulle proprietà ad essa associate. In effetti la modalità per associare un valore alla probabilità <u>non</u> è univoca.

Proprietà della probabilità e insiemi

Proprietà della probabilità e insiemi

Proprietà della probabilità e insiemi

S

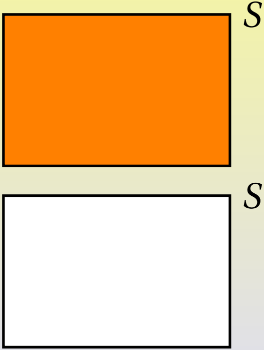
$$p(S) = 1$$

Proprietà della probabilità e insiemi

S

$$p(S) = 1$$

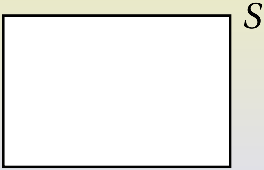
Proprietà della probabilità e insiemi



$$p(S) = 1$$

Proprietà della probabilità e insiemi

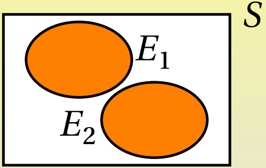
$$p(S) = 1$$



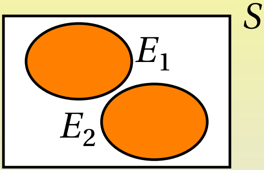
$$p(\varnothing) = 0$$

Proprietà della probabilità e insiemi

Proprietà della probabilità e insiemi

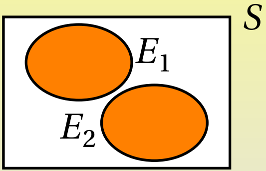


Proprietà della probabilità e insiemi



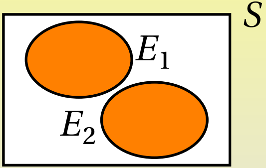
$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$$

Proprietà della probabilità e insiemi

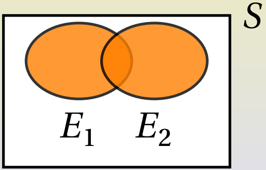


$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$$

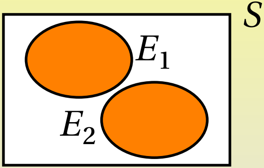
Proprietà della probabilità e insiemi



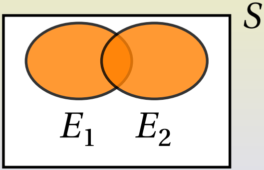
$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$$



Proprietà della probabilità e insiemi



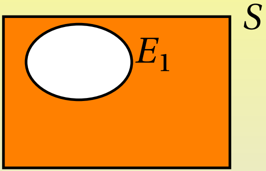
$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$$



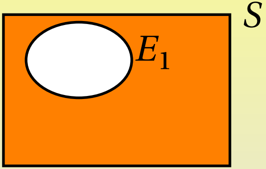
$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2$$

Proprietà della probabilità e insiemi

Proprietà della probabilità e insiemi

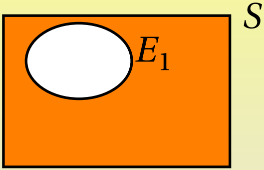


Proprietà della probabilità e insiemi



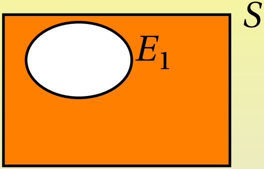
$$p(\overline{E_1}) = 1 - p(E_1)$$

Proprietà della probabilità e insiemi

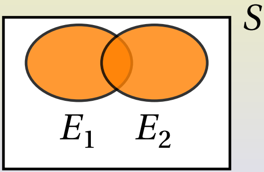


$$p(\overline{E_1}) = 1 - p(E_1)$$

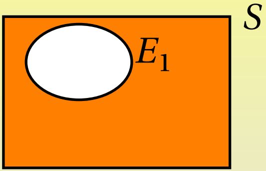
Proprietà della probabilità e insiemi



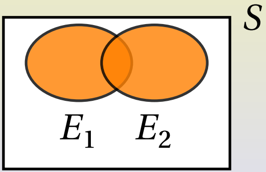
$$p(\overline{E_1}) = 1 - p(E_1)$$



Proprietà della probabilità e insiemi



$$p(\overline{E_1}) = 1 - p(E_1)$$



$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1|E_2)p(E_2) =$$

$$= p(E_2|E_1)p(E_1)$$

essendo $p(E_1|E_2) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)}$ e $p(E_2|E_1) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_1)}$

Eventi indipendenti

Due eventi E_1 ed E_2 si dicono indipendenti se $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1)p(E_2)$. Cioè se la loro probabilità condizionata, E_1 sapendo che E_2 è $p(E_1|E_2) = p(E_1)$ e quella di E_2 sapendo che E_1 è $p(E_2|E_1) = p(E_2)$.

Formula di Bayes

Abbiamo già osservato (per la probabilità di eventi dipendenti) che:

$$p(A \cap E) = p(A|E)p(E) = p(E|A)p(A)$$

da cui ricaviamo la formula di Bayes:

$$p(A|E) = \frac{p(E|A)p(A)}{p(E)}$$

Formula di Bayes (con diverse alternative)

Ipotizziamo che le alternative $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ formino una partizione dell'intero spazio campionario S, cioè:

- $A_i \neq \emptyset$

In questo caso sulle probabilità degli eventi si ha che:

$$p(S) = 1 = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$$

è possibile schematizzare come segue le probabilità relative ad un certo evento E in relazione alle diverse alternative A_i.

Formula di Bayes (con diverse alternative)

Ipotizziamo che le alternative $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ formino una partizione dell'intero spazio campionario S, cioè:

- $A_i \neq \emptyset$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$

In questo caso sulle probabilità degli eventi si ha che:

$$p(S) = 1 = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$$

è possibile schematizzare come segue le probabilità relative ad un certo evento E in relazione alle diverse alternative A_i.

Formula di Bayes (con diverse alternative)

Ipotizziamo che le alternative $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$ formino una partizione dell'intero spazio campionario S, cioè:

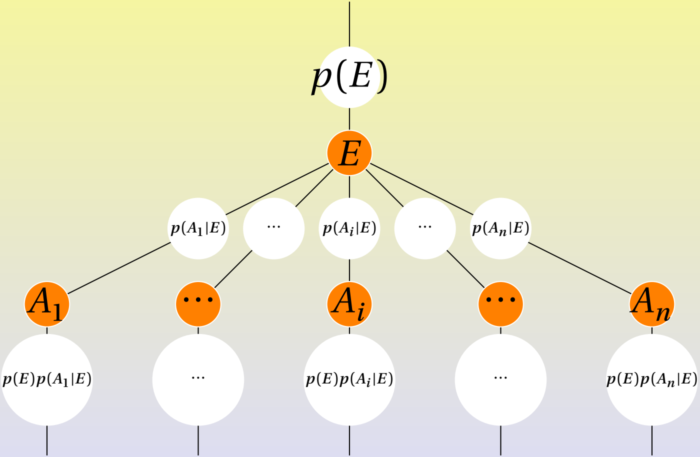
- $A_i \neq \emptyset$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$
- $S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_i \cup \cdots \cup A_n$

In questo caso sulle probabilità degli eventi si ha che:

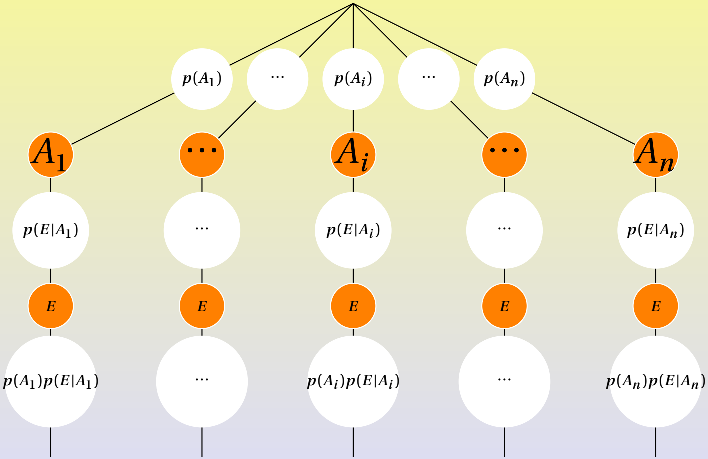
$$p(S) = 1 = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$$

è possibile schematizzare come segue le probabilità relative ad un certo evento E in relazione alle diverse alternative A_i.

Schematizziamo le probabilità $p(A_i|E)$:



Schematizziamo le probabilità $p(E|A_i)$:



$\forall i$ si ha:

$$p(E)p(A_i|E) = p(A_i)p(E|A_i)$$

dall'ultima riga dei due schemi si può ricavare che:

$$\sum_{i=1}^{n} p(E)p(A_i|E) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)p(E|A_i)$$

$$p(E) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p(A_i|E)}_{=1} = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)P(E|A_i)$$

$$p(E) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)p(E|A_i)$$

in definitiva si ricava questa espressione generale per il teorema di Bayes:

$$p(A_i|E) = \frac{p(A_i)p(E|A_i)}{p(E)} = \frac{p(A_i)p(E|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(A_i)p(E|A_i)}$$

Legge dei grandi numeri

La frequenza relativa (f) di un qualunque evento casuale (E) converge statisticamente alla sua probabilità $(p(E))$ all'aumentare del numero delle prove (N).
In formule potremmo scrivere $\forall \varepsilon > 0$:

$$\lim_{N \to +\infty} p(|p(E) - f| < \varepsilon) = 1$$