Matematica

Appunti di Matematica 5

Michele prof. Perini

IISS Copernico Pasoli - Liceo Scientifico

A.S. 2024-2025

- Funzioni elementari
- Esempio di una funzione non continua
- Teorema di Bolzano e bisezione
  - Metodo di bisezione
- Teorema di Weierstrass e di Darboux
- Punti di discontinuità

6. Limiti notevoli
   - Polinomi
   - Funzioni razionali fratte
   - $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
   - $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = 1$
   - Numero di Nepero
   - $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
   - $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

- $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^k-1}{kx} = 1$

7. Funzioni asintotiche
   - Asintoti obliqui

8. Derivate
   - Rapporto incrementale
   - Derivata in un punto
   - Tangente ad una funzione
   - Funzioni tangenti
   - Derivabilità implica continuità
   - Derivata di una funzione
   - Derivata di $f(x) = k$
   - Derivata di $f(x) = x$
   - Derivata di $f(x) = k \cdot g(x)$
   - Derivata di $f(x) = |x|$

- Derivata di $f(x) = g(x) + p(x)$
- Derivata di $f(x) = g(x)p(x)$
- Derivata di $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$
- Derivata di $f(x) = e^x$
- Derivata di $f(x) = g(p(x))$
- Derivata delle funzioni inverse
- Derivata di $f(x) = \ln(x)$
- Derivata di $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- Derivata di $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$
- Derivata di $f(x) = \sin(x)$
- Derivata di $f(x) = \arcsin(x)$
- Derivata di $f(x) = \cos(x)$
- Derivata di $f(x) = \arccos(x)$
- Derivata di $f(x) = \tan(x)$

- Derivata di $f(x) = \arctan(x)$
- Derivate di funzioni pari e dispari
- Punti angolosi
- Cuspidi
- Tangenti verticali
- Derivate successive

9. Teoremi sulle funzioni derivabili
   - Massimi e minimi relativi
   - Massimi relativi e derivata in un intorno
   - Minimi relativi e derivata in un intorno
   - Teorema di Fermat
   - Teorema di Rolle
   - Teorema di Lagrange
   - Monotonia

- Massimi e minimi
- Funzioni convesse
- Funzioni concave
- Concavità
- Flessi
- Teorema di Cauchy
- Teorema di de l'Hopital
- Confronto tra infiniti
- Metodo delle tangenti di Newton

10. Studio di funzione
    - Esempio: $y = f(x) = x^x$

11. Integrali
    - Il problema delle aree
    - Somme di Riemann

- Integrali di Riemann
- Proprietà
- Aree
  - Area tra funzione e asse x
  - Area tra due funzioni
  - $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$
- Media integrale e teorema della media
- Teorema di Torricelli
- Integrali impropri
- Primitive
- Primitive immediate
- Proprietà primitive
- Integrazione per parti
- Primitiva di $f(x) = |x|$
- Integrazione per sostituzione

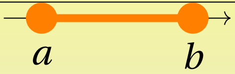
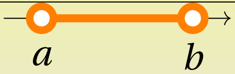
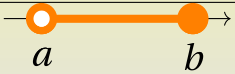
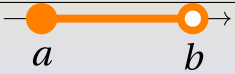
- Differenziale
- Integrali di funzioni pari e dispari su $[-a; a]$
- Primitiva di $f(x) = \tan(x)$
- Primitiva di $f(x) = \arctan(x)$
- Primitiva di $f(x) = \arcsin(x)$
- Primitiva di $f(x) = \arccos(x)$
- Primitive dei quasi-polinomi
- Funzioni non elementarmente integrabili
- Primitiva di $f(x) = \ln(x)$
- Calcolo dei volumi
  - Metodo delle sezioni
  - Solidi di rotazione
- Lunghezza delle curve
- Superfici di rotazione

12 Equazioni differenziali

- Primo ordine omogenee
- Primo ordine non omogenee
- Variabili separabili
- Secondo ordine lineari omogenee
- Linearità
- Problema di Cauchy

13 Distribuzione di probabilità

- Distribuzioni discrete
  - Variabili aleatorie
  - Distribuzione di Bernoulli
  - Distribuzione di Poisson
- Distribuzioni continue
  - Variabili aleatorie
  - Distribuzione uniforme
  - Distribuzione normale

Tipo di intervallo	Con parentesi quadre	Notazione algebrica	Rappresentazione grafica
Chiuso	$[a;b]$	$a \leq x \leq b$	
Aperto	$]a;b[$	$a < x < b$	
Nè aperto nè chiuso	$]a;b]$	$a < x \leq b$	
Nè aperto nè chiuso	$[a;b[$	$a \leq x < b$	

Sia $I \subset \mathbb{R}$ e $I \neq \emptyset$.

$M \in \mathbb{R}$ è massimo su I $(M = \max(I))$ se

- $M \in I$
- $\forall i \in I, M \geq i$

$m \in \mathbb{R}$ è minimo su I $(m = \min(I))$ se

- $m \in I$
- $\forall i \in I, m \leq i$

Elementi di topologia Estremo superiore e inferiore

Sia $I \subset \mathbb{R}$ e $I \neq \emptyset$.

$S \in \mathbb{R}$ è estremo superiore di I ($S = \sup(I)$) se

- $S \notin I$
- $M = \{r \in (\mathbb{R} - I) : r > i, \forall i \in I\}$ (maggioranti)
- $S = \min(M)$

$P \in \mathbb{R}$ è estremo inferiore di I ($P = \inf(I)$) se

- $P \notin I$
- $M = \{r \in (\mathbb{R} - I) : r < i, \forall i \in I\}$ (minoranti)
- $P = \max(M)$

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ può essere esteso utilizzando i simboli di $\pm\infty$.

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$$

L'insieme dei numeri reali può così essere rappresentato dall'intervallo:

$$\mathbb{R} = \left]-\infty; +\infty\right[$$

I_c è intorno di $c \in \mathbb{R}$ se

- I_c è un intervallo aperto
- $c \in I_c$

In sintesi $I_c = \,]a;b[$ e $c \in I_c$.

I_c è intorno centrato di $c \in \mathbb{R}$ se

$$I_c = \,]c-\varepsilon; c+\varepsilon[\,, \varepsilon > 0$$

I_{c^-} è intorno sinistro di $c \in \mathbb{R}$ se

$$I_{c^-} =]c-\varepsilon; c[\,, \varepsilon > 0$$

I_{c^+} è intorno destro di $c \in \mathbb{R}$ se

$$I_{c^+} =]c; c+\varepsilon[\,, \varepsilon > 0$$

$I_{-\infty}$ è intorno di $-\infty$ se

$$I_{-\infty} =]-\infty; M[\,, M \in \mathbb{R}$$

$I_{+\infty}$ è intorno di $+\infty$ se

$$I_{+\infty} =]M; +\infty[\,, M \in \mathbb{R}$$

Punti di accumulazione

$c \in S \subseteq \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione di S se $\forall I_c$ esiste $b \neq c$ tale che $b \in I_c$ e $b \in S$.

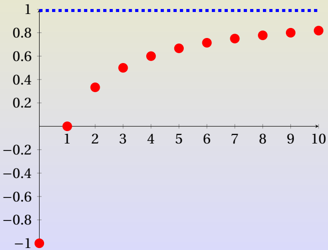
Punti isolati

$c \in S \subseteq \mathbb{R}$ è un punto isolato di S se non è di accumulazione per S.

Limite di una successione, simbologia

Il limite di una successione s_n, se esiste, si indica con il simbolo:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \begin{cases} +\infty \\ l \in \mathbb{R} \\ -\infty \end{cases} = \widetilde{\mathbb{R}}$$



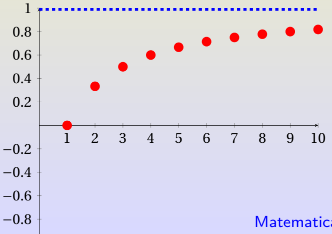
$$\lim_{n\to+\infty} s_n = l \in \mathbb{R}$$

Il limite di una successione è un numero reale l se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \overline{n} : |s_n - l| < \varepsilon,\ \forall n > \overline{n}$$

oppure

$$\forall I_l : s_n \in I_l, \exists I_{+\infty} : n \in I_{+\infty}$$



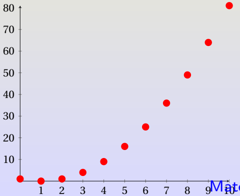
$$\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$$

Il limite di una successione è $+\infty$ se

$$\forall M > 0,\ \exists \overline{n} : s_n > M,\ \forall n > \overline{n}$$

oppure

$$\forall I_{+\infty} : s_n \in I_{+\infty}, \exists I'_{+\infty} : n \in I'_{+\infty}$$



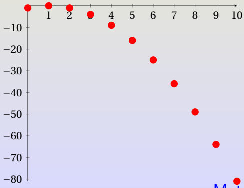
$$\lim_{n\to+\infty} s_n = -\infty$$

Il limite di una successione è $-\infty$ se

$$\forall M > 0,\ \exists \overline{n} : s_n < -M,\ \forall n > \overline{n}$$

oppure

$$\forall I_{-\infty} : s_n \in I_{-\infty}, \exists I_{+\infty} : n \in I_{+\infty}$$



ATTENZIONE: la definizione di limite di una successione formalizza il concetto di avvicinamento del valore della successione al limite al crescere di n ma non fornisce alcuna indicazione su come sia possibile determinare il valore del limite. La definizione di limite di successione permette di dimostrare le seguenti proprietà/teoremi e verificare l'esattezza del risultato di un dato limite.

Alcune proprietà e teoremi sui limiti:

Unicità del limite: il limite di una successione, se esiste, è unico.

Teorema della permanenza del segno: se $\lim_{n\to+\infty} a_n = l > 0$ allora esiste $\overline{n}$ tale che $a_n > 0$, $\forall n > \overline{n}$.

Teorema dei carabinieri: se $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to+\infty} c_n = l \in \mathbb{R}$ e $\forall n > \overline{n}$ si ha che $a_n \leq b_n \leq c_n$ allora $\lim_{n\to+\infty} b_n = l \in \mathbb{R}$.

Sintesi delle proprietà della somma tra limiti del tipo $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ per limiti finiti e infiniti (in tabella si riporta l'esisto di $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n)$):

$+$	$a \in \mathbb{R}$	$a = +\infty$	$a = -\infty$
$b \in \mathbb{R}$	$a + b$	$+\infty$	$-\infty$
$b = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$b = -\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Sintesi delle proprietà del prodotto tra limiti del tipo $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ per limiti finiti e infiniti (in tabella si riporta l'esisto di $\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n)$):

$\cdot$	$a>0$	$a=0$	$a<0$	$a=+\infty$	$a=-\infty$
$b>0$	ab	0	ab	$+\infty$	$-\infty$
$b=0$	0	0	0	$?$	$?$
$b<0$	ab	0	ab	$-\infty$	$+\infty$
$b=+\infty$	$+\infty$	$?$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$b=-\infty$	$-\infty$	$?$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Sintesi delle proprietà del quoziente tra limiti del tipo $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ per limiti finiti e infiniti (con $b_n \neq 0\ \forall n > \overline{n}$, in tabella si riporta l'esisto di $\lim_{n\to+\infty}(a_n / b_n)$):

$/$	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$	$a = +\infty$	$a = -\infty$
$b > 0$	a/b	0	a/b	$+\infty$	$-\infty$
$b = 0$	∞	$?$	∞	∞	∞
$b < 0$	a/b	0	a/b	$-\infty$	$+\infty$
$b = +\infty$	0	0	0	$?$	$?$
$b = -\infty$	0	0	0	$?$	$?$

Verifica del limite $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0,\ n\in\mathbb{N}_0$:

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$$

$$\frac{1}{n}<\varepsilon$$

$$n>\frac{1}{\varepsilon}\geq\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]^{1}=\overline{n}$$

l'ultima scrittura mostra che
$\forall\varepsilon>0,\ \exists\overline{n}:\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon,\ \forall n>\overline{n}$.

[1] con le parentesi quadre si denota qui la funzione parte intera

Verifica del limite $\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n+1}=1$, $n\in\mathbb{N}$:

$$\left|\frac{n-1}{n+1}-1\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{-2}{n+1}\right|<\varepsilon$$

$$n>\frac{2}{\varepsilon}-1\geq\left[\frac{2}{\varepsilon}-1\right]^2=\overline{n},\ \varepsilon\leq 2$$

l'ultima scrittura mostra che
$\forall\varepsilon, 0<\varepsilon\leq 2,\ \exists\overline{n}:\left|\frac{n-1}{n+1}-1\right|<\varepsilon,\ \forall n>\overline{n}$.

[2]con le parentesi quadre si denota qui la funzione parte intera

Serie numeriche

Con lo studio delle serie numeriche ci occupiamo del problema della somma di infiniti termini. Ad esempio, quanto fa $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$?

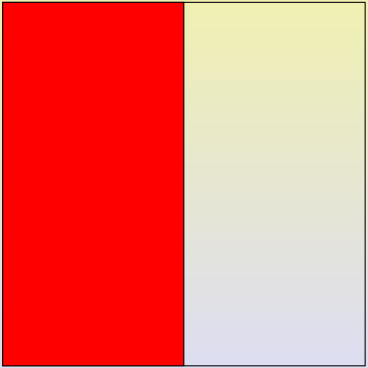
$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{\text{parte colorata}}+\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\text{non colorata}}=1$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{\text{parte colorata}}=1-\frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=\lim_{n\to+\infty}1-\frac{1}{2^n}=1$$

Serie numeriche

Con lo studio delle serie numeriche ci occupiamo del problema della somma di infiniti termini. Ad esempio, quanto fa $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots$?



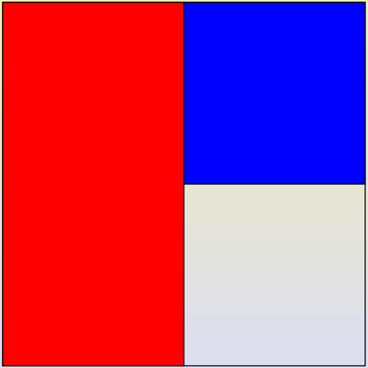
$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{\text{parte colorata}}+\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\text{non colorata}}=1$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{\text{parte colorata}}=1-\frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=\lim_{n\to+\infty}1-\frac{1}{2^n}=1$$

Serie numeriche

Con lo studio delle serie numeriche ci occupiamo del problema della somma di infiniti termini. Ad esempio, quanto fa $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$?



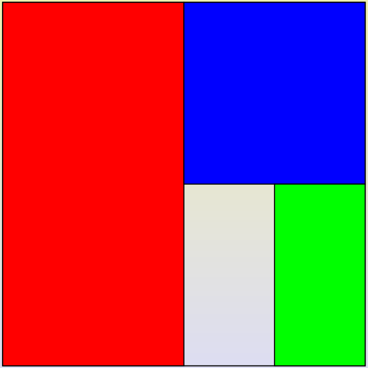
$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{\text{parte colorata}} + \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\text{non colorata}} = 1$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{\text{parte colorata}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1$$

Serie numeriche

Con lo studio delle serie numeriche ci occupiamo del problema della somma di infiniti termini. Ad esempio, quanto fa $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots$?



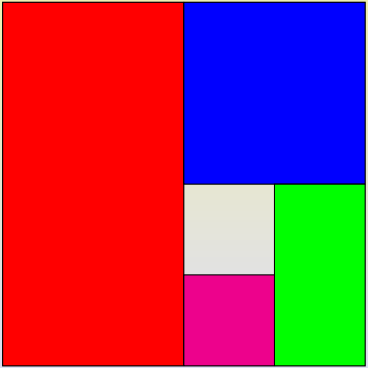
$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{\text{parte colorata}}+\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\text{non colorata}}=1$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{\text{parte colorata}}=1-\frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=\lim_{n\to+\infty}1-\frac{1}{2^n}=1$$

Serie numeriche

Con lo studio delle serie numeriche ci occupiamo del problema della somma di infiniti termini. Ad esempio, quanto fa $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots$?



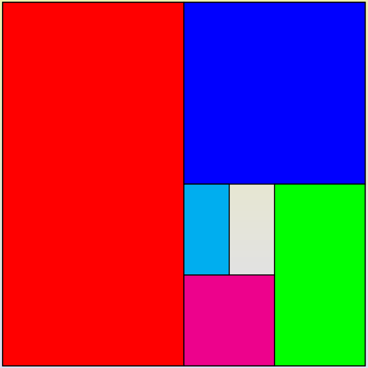
$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{\text{parte colorata}}+\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\text{non colorata}}=1$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{\text{parte colorata}}=1-\frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=\lim_{n\to+\infty}1-\frac{1}{2^n}=1$$

Serie numeriche

Con lo studio delle serie numeriche ci occupiamo del problema della somma di infiniti termini. Ad esempio, quanto fa $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$?



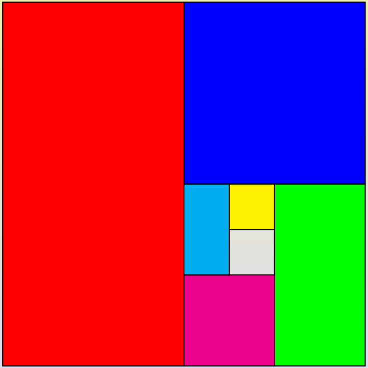
$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{\text{parte colorata}}+\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\text{non colorata}}=1$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{\text{parte colorata}}=1-\frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=\lim_{n\to+\infty}1-\frac{1}{2^n}=1$$

Serie numeriche

Con lo studio delle serie numeriche ci occupiamo del problema della somma di infiniti termini. Ad esempio, quanto fa $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$?



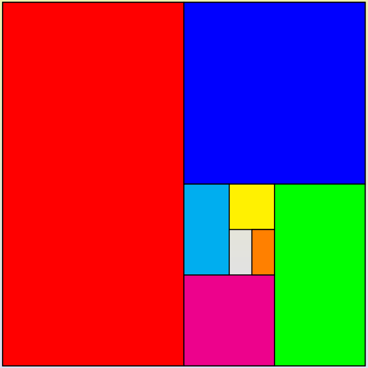
$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{\text{parte colorata}}+\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\text{non colorata}}=1$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{\text{parte colorata}}=1-\frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=\lim_{n\to+\infty}1-\frac{1}{2^n}=1$$

Serie numeriche

Con lo studio delle serie numeriche ci occupiamo del problema della somma di infiniti termini. Ad esempio, quanto fa $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$?



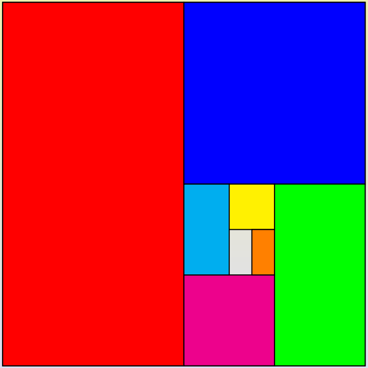
$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{\text{parte colorata}} + \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\text{non colorata}} = 1$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{\text{parte colorata}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1$$

Serie numeriche

Con lo studio delle serie numeriche ci occupiamo del problema della somma di infiniti termini. Ad esempio, quanto fa $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$?



$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{\text{parte colorata}}+\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\text{non colorata}}=1$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{\text{parte colorata}}=1-\frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=\lim_{n\to+\infty}1-\frac{1}{2^n}=1$$

Se a_i sono i termini di una successione definiamo la successione delle ridotte ennesime s_n come:

$$s_0 = a_0$$

$$s_1 = a_0 + a_1$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\ldots$$

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

Una sommatoria di infiniti termini è ricondotta al limite di una successione, grazie a questo e alle proprietà dei limiti è possibile definire in modo formale somme infinite e loro proprietà.

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i = \lim_{n\to+\infty} s_n$$

Se $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=0}^{+\infty} b_i \in \mathbb{R}$ allora[3]:

- $\sum_{i=0}^{+\infty} k \cdot a_i = k \sum_{i=0}^{+\infty} a_i, \; k \in \mathbb{R}$
- $\sum_{i=0}^{+\infty} (a_i + b_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i + \sum_{i=0}^{+\infty} b_i$

[3] Queste proprietà sono banali per un numero finito di addendi ma non per un numero infinito.

Sia $a_i = a_0 + id$ una successione aritmetica di ragione d. Si è già dimostrato utilizzando il principio di induzione che:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} (a_0 + id) = (n+1)a_0 + \frac{n(n+1)}{2}d$$

a meno che non sia $a_0 = d = 0$ la serie aritmetica diverge sempre:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} (a_0 + id) = \lim_{n\to+\infty} (n+1)a_0 + \frac{n(n+1)}{2}d = \infty$$

Sia $a_i = a_0 q^i$ una successione geometrica di ragione $q \neq 0$. Si è già dimostrato utilizzando il principio di induzione che per $q \neq 1$:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_0 q^i = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

per $a_0 \neq 0$ e $q \neq 0$ si ottiene:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_0 q^i = \lim_{n \to +\infty} a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} \text{ se } -1 < q < 1 \land q \neq \\ \infty \text{ se } q \geq 1 \\ \nexists \text{ se } q \leq -1 \end{cases}$$

Un qualsiasi numero reale positivo $r \in \mathbb{R}^+$ si può scrivere come:

$$r = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i}_{\text{parte intera, } a_n \neq 0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{+\infty} b_i \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^i}_{\text{parte decimale}}$$

con a_i, b_i le dieci cifre arabe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Un decimale limitato $l \in \mathbb{R}^+$ si può scrivere come:

$$l = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i}_{\text{parte intera, } a_n \neq 0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} b_i \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^i}_{\text{parte decimale}} =$$

$$= \underbrace{f}_{\text{parte intera}} + \underbrace{\frac{g}{10^m}}_{\text{parte decimale}}$$

con a_i, b_i le dieci cifre arabe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $f \in \mathbb{N}$ e $g \in \mathbb{N}$, $g < 10^m$.

Un decimale illimitato periodico $p \in \mathbb{R}^+$ si può scrivere come:

$$p = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i}_{\text{parte intera, } a_n \neq 0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} b_i \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^i}_{\text{antiperiodo}} + \underbrace{\sum_{i=m+1}^{+\infty} c_i \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^i}_{\text{periodo}} =$$

$$= \underbrace{f}_{\text{parte intera}} + \underbrace{\frac{g}{10^m}}_{\text{antiperiodo}} + \underbrace{\frac{1}{10^m} \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{h}{10^{ik}}}_{\text{periodo}} =$$

con a_i, b_i, c_i le dieci cifre arabe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $f \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $g \in \mathbb{N}$, $g < 10^m$ $h \in \mathbb{N}$, $h < 10^k$.

$$= \underbrace{f}_{\text{parte intera}} + \underbrace{\frac{g}{10^m}}_{\text{antiperiodo}} + \underbrace{\frac{h}{10^m} \cdot \left[\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{ik}} \right) - 1 \right]}_{\text{periodo}} =$$

$$= \underbrace{f}_{\text{parte intera}} + \underbrace{\frac{g}{10^m}}_{\text{antiperiodo}} + \underbrace{\frac{h}{10^m} \cdot \left[\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10^{k}} \right)^i \right) - 1 \right]}_{\text{periodo}} =$$

$$= \underbrace{f}_{\text{parte intera}} + \underbrace{\frac{g}{10^m}}_{\text{antiperiodo}} + \underbrace{\frac{h}{10^m} \cdot \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{10} \right)^k} - 1 \right]}_{\text{periodo}} =$$

$$= \underbrace{f}_{\text{parte intera}} + \underbrace{\frac{g}{10^m}}_{\text{antiperiodo}} + \underbrace{\frac{h}{10^m} \cdot \left[\frac{1}{10^k - 1}\right]}_{\text{periodo}}$$

Ad esempio:

$$1,23\overline{456}$$

$$f = 1, g = 23, m = 2, h = 456, k = 3, 10^k - 1 = 999$$

$$1,23\overline{456} = 1 + \frac{23}{100} + \frac{456}{100}\frac{1}{999} =$$

$$= \frac{1 \cdot 99900 + 23 \cdot 999 + 456}{99900} =$$

$$= \frac{1(100000-100)+23(1000-1)+456}{99900} =$$

$$\frac{123456-123}{99900} = \frac{41111}{3300}$$

La serie di Mengoli è una serie del tipo:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i(i+1)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i+1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{i} = 1 + \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{i} = 1$$

Per $f(x): D \subseteq \mathbb{R} \to C \subseteq \mathbb{R}$ e c di accumulazione per D si dice $l \in \widetilde{\mathbb{R}}$ il limite per x che tende a c di $f(x)$ e si indica con la scrittura:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \in \widetilde{\mathbb{R}}$$

se

$$\forall x_n \in D - \{c\} : \lim_{n \to +\infty} x_n = c \text{ si ha } \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$$

Per $f(x): D \subseteq \mathbb{R} \to C \subseteq \mathbb{R}$ e c di accumulazione per D si dice $l \in \widetilde{\mathbb{R}}$ il limite per x che tende a c di $f(x)$ e si indica con la scrittura:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \in \widetilde{\mathbb{R}}$$

se

$$\forall I_l, \forall x \neq c : f(x) \in I_l, \exists I_c \subseteq D : x \in I_c \subseteq D$$

Limite sinistro

Definito un intorno sinistro di c, $I_{c^-} =]a;c[$ con $a < c$ si può definire il limite sinistro di $f(x)$ per x che tende a c come:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l \in \widetilde{\mathbb{R}}$$

se

$$\forall I_l, \forall x \neq c : f(x) \in I_l, \exists I_{c^-} \subseteq D : x \in I_{c^-} \subseteq D$$

Limite destro

Definito un intorno destro di c, $I_{c^+} =]c;a[$ con $c < a$ si può definire il limite destro di $f(x)$ per x che tende a c come:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = l \in \widetilde{\mathbb{R}}$$

se

$$\forall I_l, \forall x \neq c : f(x) \in I_l, \exists I_{c^+} \subseteq D : x \in I_{c^+} \subseteq D$$

I limiti delle funzioni reali di variabile reale proprio perché definiti a partire dai limiti delle successioni ne mantengono tutte le proprietà formali.
Su tali limiti valgono anche tutti i teoremi visti sui limiti delle successioni.
Valgono anche le proprietà delle operazioni sui limiti delle successioni e rimangono identiche anche le forme di indecisione. Come per i limiti delle successioni la definizione di limite non dà indicazioni sulla modalità di calcolo ma permette la dimostrazione delle proprietà.

Verifichiamo che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty :$$

$$\frac{1}{x} > M, \ \forall M > 0$$

$$\forall x > 0 \text{ si ha che: } x < \frac{1}{M} = \delta \to 0 < x < \delta$$

in termini di intorni abbiamo dimostrato che:

$$\forall I_{+\infty} =]M; +\infty[: \frac{1}{x} \in I_{+\infty}, \exists I_{0^+} =]0; \delta[: x \in I_{0^+}$$

Verifichiamo che

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty :$$

$$\frac{1}{x} < -M,\ \forall M > 0$$

$$\forall x < 0 \text{ si ha che: } x > -\frac{1}{M} = -\delta \rightarrow -\delta < x < 0$$

in termini di intorni abbiamo dimostrato che:

$$\forall I_{-\infty} =]+\infty; -M[\, : \frac{1}{x} \in I_{-\infty}, \exists I_{0^-} =]-\delta; 0[\, : x \in I_{0^-}$$

Verifichiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \ :$$

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0$$

$$\forall x > 0 \text{ si ha che: } x > \frac{1}{\varepsilon} = M \to x > M$$

in termini di intorni abbiamo dimostrato che:

$$\forall I_0 =]-\varepsilon; \varepsilon[\, : \frac{1}{x} \in I_0, \exists I_{+\infty} =]M; +\infty[\, : x \in I_{+\infty}$$

Verifichiamo che

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \ :$$

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0$$

$$\forall x < 0 \text{ si ha che: } x < -\frac{1}{\varepsilon} = -M \to x < -M$$

in termini di intorni abbiamo dimostrato che:

$$\forall I_0 =]-\varepsilon; \varepsilon[\, : \frac{1}{x} \in I_0, \exists I_{-\infty} =]-\infty; -M[\, : x \in I_{-\infty}$$

Continuità

Una funzione $f(x): D \subseteq \mathbb{R} \to C \subseteq \mathbb{R}$ si dice continua in un punto c del dominio se:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

se c non è un estremo (cioè non massimo, non minimo, non estremo superiore o inferiore) del dominio la condizione di continuità può essere espressa come:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$

Una funzione continua in ogni punto del suo dominio si dice continua.

Le proprietà dei limiti consentono di dimostrare "facilmente" i seguenti teoremi sulle funzioni continue. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue allora anche le seguenti funzioni sono continue:

- $k \cdot f(x)$ con $k \in \mathbb{R}$
- $f(x) + g(x)$
- $f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f(x)}{g(x)}$ con $g(x) \neq 0$
- $f(g(x)) = f \circ g$
- se esiste, è continua anche la funzione inversa $f^{-1}(x)$

Dimostriamo in modo diretto, a titolo di esempio significativo, che se $f(x)$ e $g(x)$ sono continue allora è continua anche $f(x)+g(x)$, dobbiamo mostrare che $\lim_{x\to c} f(x)+g(x)=f(c)+g(c)$.

$$|f(x)+g(x)-f(c)-g(c)|=$$

$$=|(f(x)-f(c))+(g(x)-g(c))|\leq|f(x)-f(c)|+|g(x)-g(c)|$$

per la continuità di $f(x)$ e $g(x)$ si ha:

$$|f(x)-f(c)|+|g(x)-g(c)|<\alpha+\beta,\ \alpha,\beta>0$$

$$\text{per } \ |x-c|<\gamma \ \text{ e } \ |x-c|<\delta$$

Concludendo:

$$\left|f(x)+g(x)-f(c)-g(c)\right|<\alpha+\beta=\varepsilon>0$$

$$\text{per } |x-c|<\min(\gamma,\delta)=\theta>0$$

in termini di intorni abbiamo dimostrato che:

$$\forall I_{f(c)+g(c)}=\left]f(c)+g(c)-\varepsilon;f(c)+g(c)+\varepsilon\right[$$

$$:f(x)+g(x)\in I_{f(c)+g(c)},\exists I_c=\left]c-\theta;c+\theta\right[:x\in I_c$$

Sono funzioni continue tutte le funzioni elementari:

- x^n, $\sqrt[n]{x}$
- e^x, $\ln(x)$
- $\cos(x)$, $\arccos(x)$
- $\sin(x)$, $\arcsin(x)$
- $\tan(x)$, $\arctan(x)$

e tutte le funzioni da esse composte.

A titolo di esempio dimostriamo la continuità della funzione esponenziale. Dobbiamo mostrare che $\lim_{x \to c} e^x = e^c$.

$$\left| e^x - e^c \right| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0$$

$$\left| e^{x-c} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{e^c} = \varepsilon'$$

$$1 - \varepsilon' < e^{x-c} < 1 + \varepsilon'$$

per $0 < \varepsilon' < 1 \to \ln\left(1 - \varepsilon'\right) < x - c < \ln\left(1 + \varepsilon'\right)$

se $\delta = \min\left(-\ln\left(1 - \varepsilon'\right), \ln\left(1 + \varepsilon'\right)\right) \to -\delta < x - c < \delta$

in termini di intorni abbiamo dimostrato che:

$\forall I_{e^c} = \left]e^c - \varepsilon; e^c + \varepsilon\right[: e^x \in I_{e^c}, \exists I_c = \left]c - \delta; c + \delta\right[: x \in I_c$

Molte delle funzioni utilizzate in matematica sono continue, tante sono continue in “quasi tutti” i punti del loro dominio. Di seguito un esempio di una funzione (caratteristica) che è definita su tutti i reali e non è continua in nessuno dei suoi punti.

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Teorema degli zeri o di Bolzano: Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a;b]$. Se $f(a)f(b) < 0$ allora $\exists c \in [a;b]$ tale che $f(c) = 0$. Questo teorema si può dimostrare con diverse tecniche, il metodo di bisezione, utilizzato di seguito, è particolarmente interessante in quanto costituisce una modalità per determinare soluzioni approssimate di equazioni.

Dimostrazione del teorema di Bolzano:
definiamo una successione a_n (crescente) e una successione b_n (decrescente) che hanno lo stesso limite c e per le quali vale la relazione $a_n < c < b_n$.
Due possibili successioni sono:

$$a_n = \begin{cases} a \text{ se } n = 0 \\ \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \text{ se } f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) f\left(b_{n-1}\right) < 0 \\ a_{n-1} \text{ se } f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) f\left(b_{n-1}\right) \geq 0 \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} b \text{ se } n = 0 \\ \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \text{ se } f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) f\left(a_{n-1}\right) < 0 \\ b_{n-1} \text{ se } f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) f\left(a_{n-1}\right) \geq 0 \end{cases}$$

Per le due successioni vale la relazione:

$$0 \leq b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}$$

passando al limite e utilizzando il teorema dei carabinieri si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = c \in]a; b[$$

L'algoritmo di bisezione continua fino a quando:

$$f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)f\left(b_{n-1}\right)<0 \vee f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)f\left(a_{n-1}\right)<0$$

passando al limite si ottiene:

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)f\left(b_{n-1}\right)\leq 0$$

$$\vee \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)f\left(a_{n-1}\right)\leq 0$$

e utilizzando la continuità di $f(x)$:

$$f\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)f\left(\lim_{n\to+\infty}b_{n-1}\right)\leq 0$$

$$\vee f\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)f\left(\lim_{n\to+\infty}a_{n-1}\right)\leq 0$$

in sintesi si ha:

$$f^2(c)\leq 0$$

e quindi in conclusione:

$$f(c)=0$$

Consideriamo la funzione $f(x) = x^2 - 2$ nell'intervallo $[1;2]$, essa soddisfa le ipotesi del teorema degli zeri essendo continua sull'intervallo ed essendo $f(1)f(2) = -2 < 0$, esiste per tanto almeno un $c \in]a;b[$ tale che $0 = c^2 - 2$ (in questo caso sappiamo che $c = \sqrt{2}$ ma potremmo avere a che fare anche con equazioni delle quali non conosciamo a priori gli zeri). Determiniamo una approssimazione di c con il metodo di bisezione, utilizziamo una tabella per ordinare i dati:

n	a_n	b_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$
0	1	2	-1	2
1	1	1,5	-1	0,25
2	1,25	1,5	-0,437500	0,25
3	1,375	1,5	-0,109375	0,25
4	1,375	1,43750	-0,109375	0,0664062
5	1,40625	1,43750	0,0224609	0,0664062
6	1,40625	1,42188	0,0224609	0,0217285

Con i primi sette passaggi abbiamo determinato per lo zero c:

$$1,40625 < c < 1,42188$$

Teorema di Weierstrass[4]: Se $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo $[a;b]$ allora ammette massimo e minimo su quell'intervallo, in altre termini $\exists x_1, x_2$ tali che
$f(x_1) = m \leq f(x) \leq M = f(x_2)\ \forall x \in [a;b]$.
Conseguenza del teorema di Weierstrass è il teorema di Darboux:
Teorema di Darboux: Se $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo $[a;b]$ allora $\forall l \in [m;M]$ (con m e M rispettivamente il minimo e il massimo di $f(x)$ su $[a;b]$) l'equazione $f(x) = l$ ammette una soluzione in $[a;b]$.

[4] Qui solo enunciato.

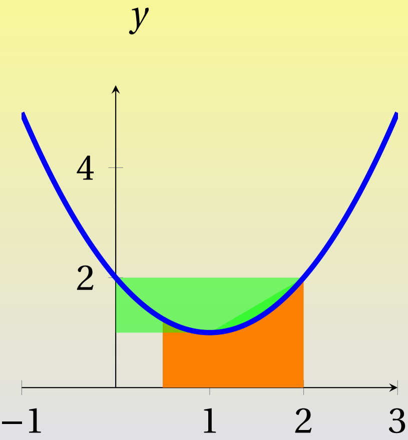
Dimostrazione del teorema di Darboux: Il teorema di Weierstrass su $f(x)$ assicura che $\exists x_1, x_2 \in [a;b]$ tali che $f(x_1) = m \leq f(x) \leq M = f(x_2)\ \forall x \in [a;b]$.
Definiamo una funzione ausiliaria $g(x) = f(x) - l$ continua, in quanto somma di funzioni continue, su $g(x)$ vale la relazione:

$$f(x_1) - l = m - l \leq f(x) - l \leq M - l = f(x_2) - l\ \forall x \in [a;b]$$

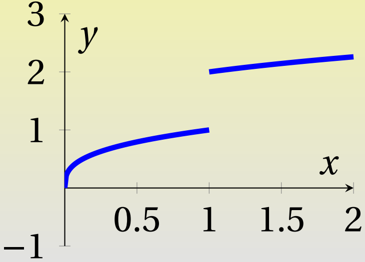
$$g(x_1) = m - l \leq g(x) \leq M - l = g(x_2)\ \forall x \in [a;b]$$

Su $g(x)$ è possibile applicare il teorema degli zeri nell'intervallo $[x_1; x_2]$, si ha infatti che $g(x_1) \leq 0$ e $g(x_2) \geq 0$. Questo assicura che esiste sempre la soluzione dell'equazione $g(x) = 0$ e quindi di $f(x) - l = 0$ e, in conclusione, esiste sempre la soluzione dell'equazione $f(x) = l$ con $x \in [x_1; x_2] \subseteq [a; b]$.

Il teorema di Darboux si potrebbe riformulare come segue: l'immagine di un intervallo chiuso e limitato di una funzione continua è un intervallo chiuso e limitato.



Discontinuità di prima specie [5]



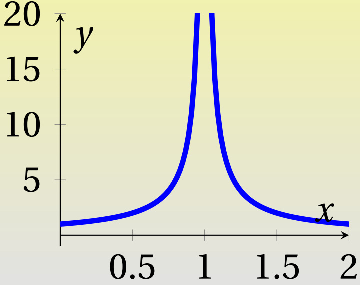
Una funzione $f(x)$ continua in un intorno di c, c escluso, presenta una discontinuità di prima specie se:

$$\begin{cases} \lim_{x\to c^+} f(x) = l_+ \in \mathbb{R} \\ \lim_{x\to c^-} f(x) = l_- \in \mathbb{R} \\ l_+ \neq f(c) \vee l_- \neq f(c) \vee l_+ \neq l_- \end{cases}$$

se $l_+ = l_- \neq f(c)$ la discontinuità si dice eliminabile (basta porre $l_+ = l_- = f(c)$).

[5] In accordo con *Analisi Uno. Primo corso di analisi matematica. Teoria ed esercizi* **di Giuseppe De Marco**, ed. Decibel Zanichelli.

Discontinuità di seconda specie [6]



Una funzione $f(x)$ continua in un intorno di c, c escluso, presenta una discontinuità di seconda specie se non è di prima specie.

[6] In accordo con *Analisi Uno. Primo corso di analisi matematica. Teoria ed esercizi* **di Giuseppe De Marco**, ed. Decibel Zanichelli.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i,\ c_n \neq 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \sum_{i=0}^{n} c_i x^i = \lim_{x\to\infty} c_n x^n \left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_i}{c_n} \frac{x^i}{x^n}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} c_n x^n = \infty$$

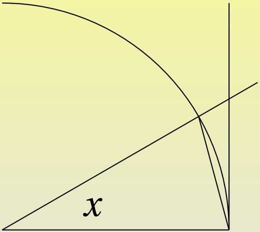
$$f(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^j},\ a_n, b_m \neq 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^j} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} 0 \text{ se } m > n \\ \frac{a_n}{b_m} \text{ se } m = n \\ \infty \text{ se } m < n \end{cases}$$

Limiti notevoli $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Giustifichiamo (non dimostriamo) il limite
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.



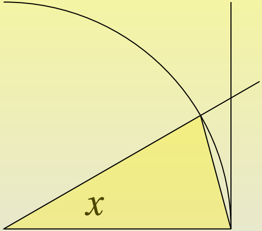
$S_{\text{gialla}} \le S_{\text{arancione}} \le S_{\text{rossa}}$

r

$$\frac{1}{2}r^2\left|\sin(x)\right| \le \frac{1}{2}r^2\left|x\right| \le \frac{1}{2}r^2\left|\tan(x)\right|$$

$$\left|\sin(x)\right| \le \left|x\right| \le \left|\tan(x)\right|$$

Giustifichiamo (non dimostriamo) il limite $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$.



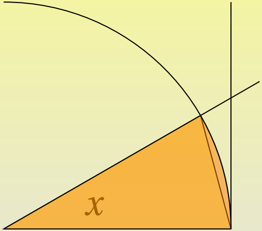
$$S_{\text{gialla}} \le S_{\text{arancione}} \le S_{\text{rossa}}$$

r

$$\frac{1}{2}r^2\left|\sin(x)\right| \le \frac{1}{2}r^2|x| \le \frac{1}{2}r^2\left|\tan(x)\right|$$

$$\left|\sin(x)\right| \le |x| \le \left|\tan(x)\right|$$

Giustifichiamo (non dimostriamo) il limite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.



$S_{\text{gialla}} \leq S_{\text{arancione}} \leq S_{\text{rossa}}$

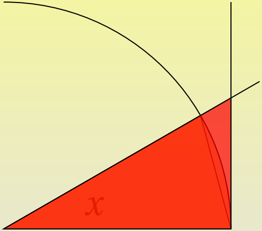
r

$$\frac{1}{2} r^2 \left|\sin(x)\right| \leq \frac{1}{2} r^2 \left|x\right| \leq \frac{1}{2} r^2 \left|\tan(x)\right|$$

$$\left|\sin(x)\right| \leq |x| \leq \left|\tan(x)\right|$$

Limiti notevoli $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$

Giustifichiamo (non dimostriamo) il limite
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$.



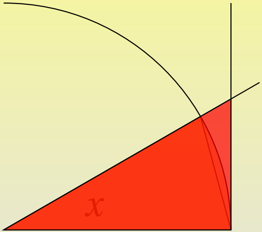
$S_{\text{gialla}} \le S_{\text{arancione}} \le S_{\text{rossa}}$

r

$$\frac{1}{2}r^2\left|\sin(x)\right| \le \frac{1}{2}r^2\left|x\right| \le \frac{1}{2}r^2\left|\tan(x)\right|$$

$$\left|\sin(x)\right| \le |x| \le \left|\tan(x)\right|$$

Giustifichiamo (non dimostriamo) il limite $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$.



$S_{\text{gialla}} \le S_{\text{arancione}} \le S_{\text{rossa}}$

r

$$\frac{1}{2}r^2\left|\sin(x)\right| \le \frac{1}{2}r^2\left|x\right| \le \frac{1}{2}r^2\left|\tan(x)\right|$$

$$\left|\sin(x)\right| \le |x| \le \left|\tan(x)\right|$$

$$|\sin(x)| \le |x| \le \left|\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right|$$

$$1 \le \left|\frac{x}{\sin(x)}\right| \le \left|\frac{1}{\cos(x)}\right|$$

$$|\cos(x)| \le \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \le 1$$

Per il teorema dei carabinieri si ottiene:

$$\lim_{x\to 0} |\cos(x)| \le \lim_{x\to 0} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \le \lim_{x\to 0} 1$$

$$1 \le \lim_{x\to 0} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \le 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\sin(x)|}{|x|} = 1$$

se $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

se $-\frac{\pi}{2} < x < 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{-x} = 1$$

in conclusione[7]:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

[7] Per ottenere questo risultato si è utilizzata la continuità della funzione coseno.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{\frac{x^2}{2}(1+\cos(x))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{\frac{x^2}{2}(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{\frac{x^2}{2}(1+\cos(x))} =$$

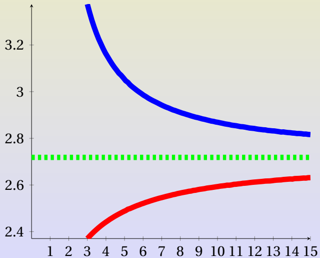
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \frac{2}{1+\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \frac{2}{1+\cos(x)} = 1^8$$

[8] Per ottenere questo risultato si è utilizzata la continuità della funzione coseno.

Il numero di Nepero (e) è per definizione estesa per quanto visto sulle successioni e l'esponenziale naturale:

$$e = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \approx 2,71828$$



Limiti notevoli $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

Per le proprietà dell'esponenziale naturale, per $x < 1$ si ha:

$$x + 1 \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$$

$$x \leq e^x - 1 \leq \frac{1}{1-x} - 1$$

$$x \leq e^x - 1 \leq \frac{x}{1-x}$$

se $0 < x < 1$:

$$1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{1}{1-x}$$

per il teorema dei carabinieri si ottiene:

$$\lim_{x\to 0} 1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \leq \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x}$$

$$1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \leq 1$$

se $x < 0$:

$$\frac{1}{1-x} \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq 1$$

per il teorema dei carabinieri si ottiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x} \leq \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \leq \lim_{x\to 0} 1$$

$$1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \leq 1$$

In conclusione: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} =$$

$$\boxed{1 + x = e^y \rightarrow x = e^y - 1}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\ln(e^y)}{e^y - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^k - 1}{kx} =$$

$$\boxed{1 + x = e^y \rightarrow x = e^y - 1}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{(e^y)^k - 1}{k\left(e^y - 1\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{ky} - 1}{k\left(e^y - 1\right)} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{e^{ky}-1}{ky}}{k\frac{e^y-1}{ky}} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{ky} - 1}{ky} =$$

$$\boxed{ky = z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

Funzioni asintotiche

$f(x)$ e $g(x)$ si dicono asintotiche in $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ se

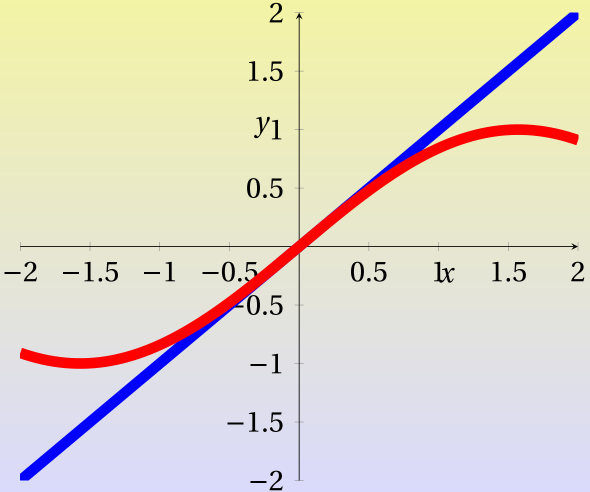
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

questo si indica con il simbolo

$$f(x) \sim g(x), \; x \to c$$

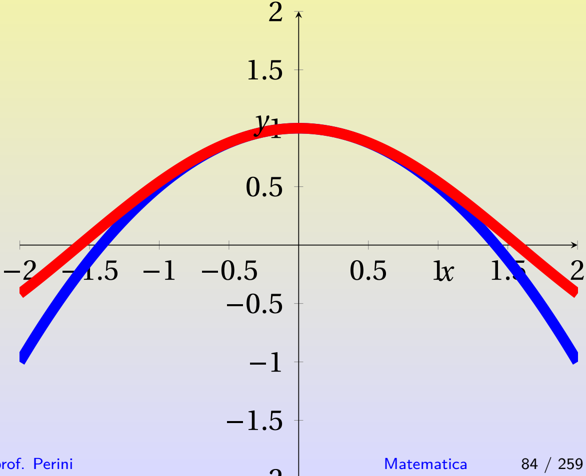
Funzioni asintotiche

$$\sin(x) \sim x,\ x \to 0$$



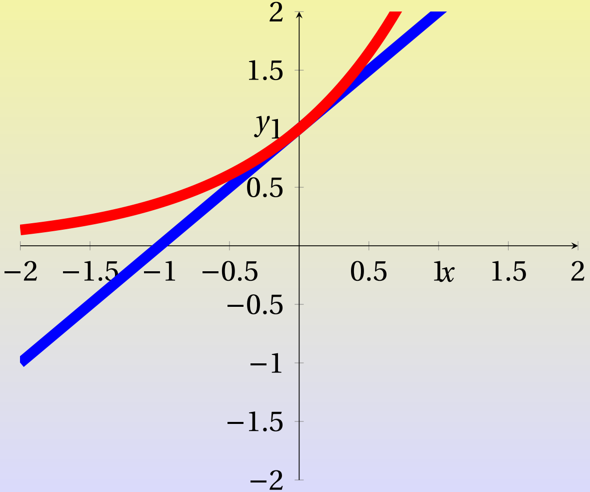
Funzioni asintotiche

$$\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2},\ x \to 0$$



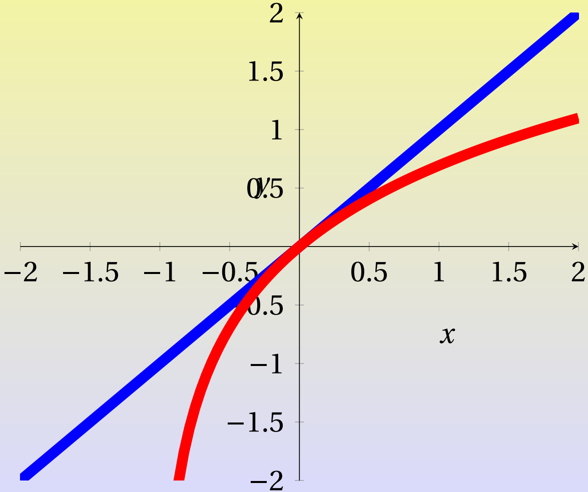
Funzioni asintotiche

$$e^x \sim 1 + x,\ x \to 0$$



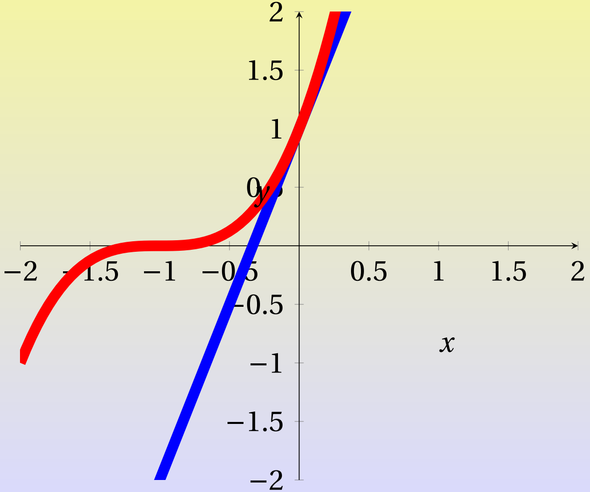
Funzioni asintotiche

$$\ln(1+x) \sim x, \; x \to 0$$



Funzioni asintotiche

$$(1+x)^k \sim 1+kx, \; x \to 0$$



Un asintoto obliquo è una retta (con $m \neq 0$) asintotica ad una funzione $f(x)$ per $x \to \infty$. Si deve verificare che:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{mx+q} = 1$$

Affinché ciò possa accadere deve essere:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Un asintoto obliquo è una retta (con $m \neq 0$) asintotica ad una funzione $f(x)$ per $x \to \infty$. Si deve verificare che:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{mx+q} = 1$$

Affinché ciò possa accadere deve essere:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x\left(m+\frac{q}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{mx} = 1 \to \boxed{m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}}$$

Un asintoto obliquo è una retta (con $m \neq 0$) asintotica ad una funzione $f(x)$ per $x \to \infty$. Si deve verificare che:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{mx+q} = 1$$

Affinché ciò possa accadere deve essere:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x\left(m+\frac{q}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{mx} = 1 \to \boxed{m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} mx+q \to \boxed{q = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx}$$

Un asintoto obliquo è una retta (con $m \neq 0$) asintotica ad una funzione $f(x)$ per $x \to \infty$. Si deve verificare che:

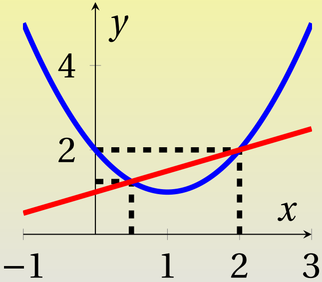
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{mx+q} = 1$$

Affinché ciò possa accadere deve essere:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x\left(m+\frac{q}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{mx} = 1 \to \boxed{m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} mx + q \to \boxed{q = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx}$$



Rapporto incrementale:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Se $\Delta x \to 0$ il rapporto incrementale passa dall'essere il coefficiente angolare della secante al coefficiente angolare della retta tangente.

Definiamo la derivata di una funzione nel suo punto di ascissa $x = c$.

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Fin dalla prima introduzione del concetto di derivata introduciamo diverse modalità per la sua definizione e rappresentazione, ogni modalità presenta vantaggi diversi nell'utilizzo. Se il limite di cui sopra esiste finito la funzione si dice derivabile in quel punto.

Tangente ad una funzione

Esplicitiamo l'equazione di una retta r tangente ad una funzione $y = f(x)$ (in simboli $r \, f(x)$[9]) nel punto $(c, f(c))$:

$$r \, f(x) \rightarrow r : y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

o anche:

$$r \, f(x) \rightarrow r : y = f'(c)x + f(c) - cf'(c)$$

[9] Il simbolo di retta tangente non è universalmente utilizzato ed è ispirato ad un compito d'esame di stato del 2019 di uno studente del liceo Copernico: Pietro Cavallini.

Funzioni tangenti

Due funzioni derivabili $f(x)$ e $g(x)$ si dicono tangenti in un punto $P(c, f(c) = g(c))$ (in simboli $f(x)$ $g(x)$[10]) se:

$$\begin{cases} f(c) = g(c) \\ f'(c) = g'(c) \end{cases}$$

[10]Il simbolo di funzioni tangenti non è universalmente utilizzato ed è ispirato ad un compito d'esame di stato del 2019 di uno studente del liceo Copernico: Pietro Cavallini.

Teorema: Se una funzione è derivabile in $x = c$ allora è anche continua in quel punto.
Dimostrazione: Il fatto che $f(x)$ sia derivabile in $x = c$ significa che:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to c} (f(x) - f(c)) = f'(c) \cdot \lim_{x \to c} (x - c)$$

$$\lim_{x \to c} (f(x) - f(c)) = 0$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

l'ultima equazione è la definizione di continuità di $f(x)$ nel suo punto $x = c$.

A partire da una funzione $f(x)$ possiamo definirne un'altra grazie alla definizione di derivata.
Introduciamo anche altri simboli per indicare la derivata:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = D(f(x)) =$$

$$= \lim_{c \to x} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La funzione così ottenuta si chiama derivata prima o semplicemente derivata.

Derivata di $f(x) = k$

Calcoliamo in modo diretto la derivata di $f(x) = k$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\boxed{f(x) = k \to f'(x) = 0}$$

Derivata di $f(x) = x$

Calcoliamo in modo diretto la derivata di $f(x) = x$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} =$$

$$\boxed{f(x) = x \to f'(x) = 1}$$

Calcoliamo in modo diretto la derivata di $f(x) = k \cdot g(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{k \cdot g(x+h) - k \cdot g(x)}{h} = k \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = k \cdot g$$

$$\boxed{f(x) = k \cdot g(x) \to f'(x) = k \cdot g'(x)}$$

Derivata di $f(x) = |x|$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x > 0 \\ -1 \text{ se } x < 0 \end{cases} = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}$$

La funzione valore assoluto non è derivabile in $x = 0$, si ha infatti:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1 \text{ mentre } \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -1$$

$$\boxed{f(x) = |x| \to f'(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}}$$

Calcoliamo in modo diretto la derivata di $f(x) = g(x) + p(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) + p(x+h) - (g(x) + p(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{p(x+h) - p(x)}{h} \right) = g'(x)+p'(x$$

$$\boxed{f(x) = g(x) + p(x) \to f'(x) = g'(x) + p'(x)}$$

Calcoliamo in modo diretto la derivata di $f(x) = g(x)p(x)$:

$$D(g(x)p(x)) = \lim_{c \to x} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} =$$

$$= \lim_{c \to x} \frac{g(x)p(x) - g(c)p(c)}{x - c} =$$

$$= \lim_{c \to x} \left(\frac{g(x)p(x) - g(c)p(x)}{x - c} + \frac{g(c)p(x) - g(c)p(c)}{x - c} \right) =$$

$$= \lim_{c \to x} \left(p(x) \frac{g(x) - g(c)}{x - c} + g(c) \frac{p(x) - p(c)}{x - c} \right) =$$

Derivata di $f(x) = g(x)p(x)$

$$= g'(x)p(x) + g(x)p'(x)$$

$$\boxed{f(x) = g(x)p(x) \rightarrow f'(x) = g'(x)p(x) + g(x)p'(x)}$$

Nella dimostrazione si è utilizzata la continuità di $g(x)$ e $p(x)$.

Dimostriamo per induzione che la derivata di $f(x) = x^n$ è $f'(x) = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

- se $n = 0$ si ha $f(x) = x^0 = 1$ e $f'(x) = 0 \cdot x^{0-1} = 0$, vero.
- Dimostriamo che se l'ipotesi induttiva è vera per n allora è vera anche per $n+1$: $D\left(x^{n+1}\right) = D(x \cdot x^n) = D(x)x^n + xD(x^n) = x^n + xnx^{n-1} = (n+1)x^n$ che è l'ipotesi induttiva per $n+1$.

$$\boxed{f(x) = x^n \to f'(x) = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N}}$$

Le funzioni di cui sopra e le loro derivate hanno tutte $\mathbb{R}$ come dominio per $n \in \mathbb{N}_0$.

Derivata di $f(x) = e^x$

Calcoliamo in modo diretto la derivata di $f(x) = e^x$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

$$\boxed{f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x}$$

Calcoliamo in modo diretto la derivata della composizione di funzioni:

$$D(g(p(x))) = \lim_{c \to x} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{c \to x} \frac{g(p(x)) - g(p(c))}{x - c}$$

$$= \lim_{c \to x} \frac{g(p(x)) - g(p(c))}{p(x) - p(c)} \frac{p(x) - p(c)}{x - c} = g'(p(x)) \cdot p'(x)$$

$$\boxed{f(x) = g(p(x)) \rightarrow f'(x) = g'(p(x)) \cdot p'(x)}$$

o in altri termini:

$$\boxed{f(x) = g \circ p(x) \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{dg}{dp} \frac{dp}{dx}}$$

Siano $f(x)$ e $g(x) = f^{-1}(x)$ due funzioni inverse, si ha allora:

$$f(g(x)) = x$$

derivando ambo i membri si ottiene:

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

in altri termini:

$$\boxed{D\big(f^{-1}(x)\big) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

Derivata di $f(x) = \ln(x)$

Per calcolare la derivata del logaritmo naturale utilizziamo il teorema di derivazione delle funzioni inverse:

$$D(\ln(x)) = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{f(x) = \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}}$$

Derivata di $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Calcoliamo la derivata di $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Ricordiamo che in queste funzioni $x > 0$, possiamo scrivere $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$:

$$D\left(e^{\alpha \ln(x)}\right) = e^{\alpha \ln(x)} D(\alpha \ln(x)) =$$

$$x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

$$\boxed{f(x) = x^\alpha \to f'(x) = \alpha x^{\alpha-1},\ \alpha \in \mathbb{R}}$$

Derivata di $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$

Utilizziamo il teorema delle derivate delle funzioni inverse (a seconda della parità o disparità di n i domini delle funzioni $\sqrt[n]{x}$ saranno diversi).

$$D\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$$

$$\boxed{f(x) = \sqrt[n]{x} \to f'(x) = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx},\ n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}}$$

Calcoliamo in modo diretto la derivata del seno:

$$D(\sin(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\cos(h) - 1}{h} \sin(x) + \frac{\sin(h)}{h} \cos(x) \right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{h}{2} \frac{\cos(h) - 1}{\frac{h^2}{2}} \sin(x) + \cos(x) \right) = \cos(x)$$

$$\boxed{f(x) = \sin(x) \to f'(x) = \cos(x)}$$

Derivata di $f(x) = \arcsin(x)$

Utilizziamo il teorema della derivata delle funzioni inverse.

$$D(\arcsin(x)) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} =$$

La funzione arcoseno restituisce angoli in $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, per questi angoli si ha $\cos(x) \geq 0$, si può quindi scrivere:

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin(x)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\boxed{f(x) = \arcsin(x) \to f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Derivata di $f(x) = \cos(x)$

Calcoliamo la derivata del coseno a partire dalla derivata membra a membro della relazione goniometrica fondamentale:

$$(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$$

$$2\cos(x)D(\cos(x)) + 2\sin(x)D(\sin(x)) = 0$$

$$\cos(x)D(\cos(x)) + \sin(x)\cos(x) = 0$$

$$\cos(x)(D(\cos(x)) + \sin(x)) = 0$$

$$D(\cos(x)) = -\sin(x)$$

$$\boxed{f(x) = \cos(x) \rightarrow f'(x) = -\sin(x)}$$

Derivata di $f(x) = \arccos(x)$

Utilizziamo il teorema della derivata delle funzioni inverse.

$$D(\arccos(x)) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} =$$

La funzione arcocoseno restituisce angoli in $[0;\pi]$, per questi angoli si ha $\sin(x) \geq 0$, si può quindi scrivere:

$$= \frac{1}{-\sqrt{1-(\cos(\arccos(x)))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{f(x) = \arccos(x) \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Calcoliamo la derivata della tangente dopo aver riscritto la funzione in termini di seno e coseno:

$$D(\tan(x)) = D\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = D\left(\sin(x)\cos(x)^{-1}\right) =$$

$$= \cos(x)\cos(x)^{-1} - \sin(x)\cos(x)^{-2}\left(-\sin(x)\right) =$$

$$= 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = 1 + (\tan(x))^2$$

$$\boxed{f(x) = \tan(x) \rightarrow f'(x) = 1 + (\tan(x))^2}$$

Derivata di $f(x) = \arctan(x)$

Utilizziamo il teorema della derivata delle funzioni inverse.

$$D(\arctan(x)) = \frac{1}{1+(\tan(\arctan(x)))^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\boxed{f(x) = \arctan(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Derivate di funzioni pari e dispari

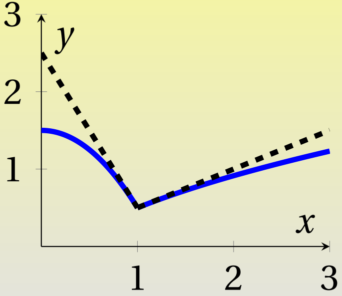
Dimostriamo che la derivata di una funzione pari ($f(-x) = f(x)$) è una funzione dispari:

$$f(-x) = f(x) \rightarrow -f'(-x) = f'(x) \rightarrow f'(-x) = -f'(x)$$

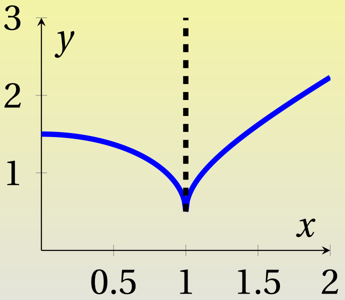
Dimostriamo che la derivata di una funzione dispari ($f(-x) = -f(x)$) è una funzione pari:

$$f(-x) = -f(x) \rightarrow -f'(-x) = -f'(x) \rightarrow f'(-x) = f'(x)$$

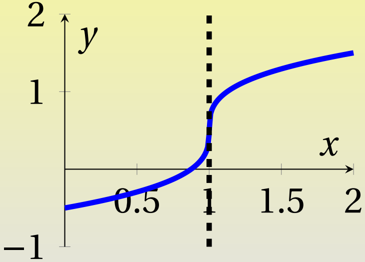
Punti angolosi



Un punto angoloso è un punto in cui la funzione è non derivabile e almeno uno tra limite destro e sinistro della sua derivata prima è finito.



Una cuspide è un punto in cui la funzione è non derivabile e in cui limite destro e sinistro della derivata prima sono entrambi infiniti con segni opposti.



Un punto a tangente verticale è un punto in cui la funzione è non derivabile e in cui limite destro e sinistro della derivata prima sono entrambi infiniti con lo stesso segno.

L'operazione di derivazione può essere ripetuta più volte, in questo caso si parla di derivate successive. Per le derivate successive alla prima si usano i simboli:

$$f''(x), \ldots, f^n(x)$$

$$D^2\left(f(x)\right), \ldots, D^n\left(f(x)\right)$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}, \ldots, \frac{d^nf}{dx^n}$$

Teoremi sulle funzioni derivabili Massimi e minimi relativi

Massimo relativo

Un punto $c \in]a;b[$ si dice di massimo relativo per la funzione $f(x) : D \to \mathbb{R}$ se:

$$M = f(c) \geq f(x) \forall x \in]a;b[\cap D$$

Minimo relativo

Un punto $c \in]a;b[$ si dice di minimo relativo per la funzione $f(x) : D \to \mathbb{R}$ se:

$$m = f(c) \leq f(x) \forall x \in]a;b[\cap D$$

Teoremi sulle funzioni derivabili Massimi relativi e derivata in un intorno

Se $c \in]a;b[$ è massimo relativo per $f(x) : D \to \mathbb{R}$ si ha $\forall x \in]a;b[\subseteq D$:

$$f(c) \geq f(x) \to f(x) - f(c) \leq 0$$

se $x \in]a;c[$:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

passando al limite per $x \to c$ si ottiene:

$$f'(c) \geq 0$$

se $x \in]c;b[$:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

passando al limite per $x \to c$ si ottiene:

$$f'(c) \leq 0$$

In conclusione se c è massimo relativo per $f(x)$ allora $f'(c) = 0$.

Teoremi sulle funzioni derivabili Minimi relativi e derivata in un intorno

Se $c \in]a;b[$ è minimo relativo per $f(x): D \to \mathbb{R}$ si ha $\forall x \in]a;b[\subseteq D$:

$$f(c) \le f(x) \to f(x) - f(c) \ge 0$$

se $x \in]a;c[$:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \le 0$$

passando al limite per $x \to c$ si ottiene:

$$f'(c) \le 0$$

se $x \in]c;b[$:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0$$

passando al limite per $x \to c$ si ottiene:

$$f'(c) \ge 0$$

In conclusione se c è minimo relativo per $f(x)$ allora $f'(c) = 0$.

Teorema di Fermat: Se $c \in]a;b[\subseteq D$ è un estremo (massimo o minimo) relativo per $f(x): D \to \mathbb{R}$ derivabile in c, allora $f'(c) = 0$.
Dimostrazione: immediata dalle dimostrazioni sui massimi e minimi relativi e la derivata in un intorno.

Punti stazionari

Un punto $(c, f(c))$ si dice stazionario se $f'(c) = 0$.

ATTENZIONE: Il teorema di Fermat afferma che se $(c, f(c))$ è un estremo relativo allora $f'(c) = 0$ ma non afferma che se $f'(c) = 0$ allora $(c, f(c))$ è un estremo relativo (il che non si verifica sempre).

Se una funzione $f(x)$:

- $f(x)$ è continua in $[a;b]$
- $f(x)$ è derivabile in $]a;b[$
- $f(a) = f(b)$

allora $\exists c \in\,]a;b[\, : f'(c) = 0$.

Dimostrazione: se la funzione è costante la sua derivata è nulla in tutti i punti dell'intervallo e il teorema è dimostrato. Se $f(x)$ è continua non costante in $[a;b]$ per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluto sull'intervallo.

Essendo $f(a) = f(b)$ il massimo o il minimo devono essere in $]a;b[$ (altrimenti la funzione sarebbe costante), per il teorema di Fermat deve essere $f'(c) = 0$, $c \in\,]a;b[$.

Teoremi sulle funzioni derivabili Teorema di Lagrange

Se una funzione $f(x)$:

- $f(x)$ è continua in $[a;b]$
- $f(x)$ è derivabile in $]a;b[$

allora $\exists c \in\,]a;b[: f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dimostrazione: utilizziamo la funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$g(x)$ oltre a soddisfare le ipotesi del teorema di Lagrange soddisfa la relazione $g(a) = g(b) = 0$.

Su $g(x)$ vale il teorema di Rolle e quindi $\exists c \in]a;b[$ tale che:

$$g'(c) = 0 \rightarrow 0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Il teorema di Lagrange ci assicura che se s è una retta secante $f(x)$ in $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ $\exists r$ $f(x)$ in $(c, f(c))$, $c \in]a;b[$ tale che $r \parallel s$.

Per una funzione $f(x): D \to \mathbb{R}$ derivabile in un intervallo $I \subseteq D$ valgono i seguenti teoremi di monotonia.
Crescenza:

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2) \leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in I$$

Decrescenza:

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \to f(x_1) \geq f(x_2) \leftrightarrow f'(x) \leq 0 \forall x \in I$$

Dimostrazione teorema sulla crescenza, prima parte. Dimostriamo che se la funzione è crescente allora la sua derivata è positiva. $\forall x_1, x_2 \in I$ si ha:

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \wedge x_2 - x_1 > 0$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

passando al limite per $x_1 \to x_2$ si ottiene:

$$f'(x_2) \geq 0$$

essendo l'ultima scrittura vera $\forall x_2 \in I$ si ottiene:

$$f'(x) \geq 0 \forall x \in I$$

Dimostrazione teorema sulla crescenza, seconda parte. Dimostriamo che se la derivata è positiva allora la funzione è crescente.

$\forall x_1, x_2 \in I : x_2 > x_1$ si ha, applicando il teorema di Lagrange in $[x_1; x_2]$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c),\ c \in \left]x_1; x_2\right[\subseteq I$$

essendo la derivata positiva per ogni punto dell'intervallo otteniamo:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0,\ \forall x_2 > x_1$$

In conclusione $\forall x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$.

Per le funzioni derivabili valgono le seguenti relazioni tra derivata prima e monotonia che riassumiamo tramite tabella, la dimostrazione è stata fatta solo nel caso della crescenza, le altre sono analoghe.

$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$
$f(x)$	crescente	costante	decrescente

I segni della derivata prima della tabella sono da interpretare come sempre identici in un certo intervallo del dominio.

Teoremi sulle funzioni derivabili Massimi e minimi

Per quanto precedentemente visto si ha per le funzioni derivabili:

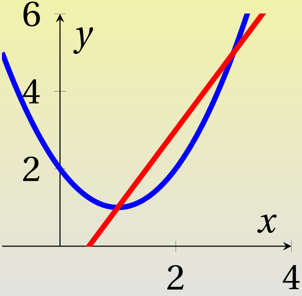
x_M

$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

x_m

$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

x_M e x_m rispettivamente punti di massimo e di minimo relativo per $f(x)$.

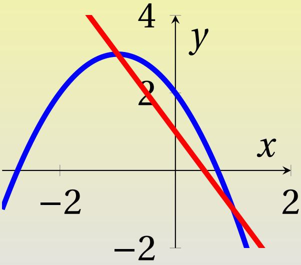


Una funzione $f(x): D \to \mathbb{R}$ si dice convessa (o con concavità verso l'alto) in un certo intervallo $I \subseteq D$ se il suo valore è inferiore ad ogni secante in I, in simboli:

$$\forall x, a, b \in I$$

deve essere

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a$$



Una funzione $f(x): D \to \mathbb{R}$ si dice concava (o con concavità verso il basso) in un certo intervallo $I \subseteq D$ se il suo valore è superiore ad ogni secante in I, in simboli:

$$\forall x, a, b \in I$$

deve essere

$$f(x) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a$$

Per una funzione $f(x): D \to \mathbb{R}$ derivabile in un intervallo $I \subseteq D$ valgono i seguenti teoremi di concavità.

Convessa:

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \to f'(x_1) \leq f'(x_2) \leftrightarrow$$

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),\ \forall x, a, b \in I$$

Concava:

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \to f'(x_1) \geq f'(x_2) \leftrightarrow$$

$$f(x) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),\ \forall x, a, b \in I$$

Per la dimostrazione del teorema sulla convessità utilizziamo la funzione ausiliaria:

$$h(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right)$$

per la quale valgono le relazioni:

$$h(a) = f(a) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a)\right) = 0$$

$$h(b) = f(b) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)\right) = 0$$

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dimostrazione teorema sulla convessità, prima parte. Ipotizziamo $f'(x)$ crescente e quindi anche $h'(x)$ crescente differendo le due funzioni solo di una costante. Su $h(x)$ vale il teorema di Rolle, esiste pertanto $c \in \,]a;b[$ tale che $h'(c) = 0$. Essendo $h'(x)$ crescente in I deve verificarsi la situazione sintetizzata in tabella:

	a	c b
$h'(x)$	$-$	$+$
$h(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

c è minimo relativo di $h(x)$ su $[a;b]$ ed essendo $h(a) = h(b) = 0$ dovrà essere $h(x) \leq 0$ in I. per tanto si ha:

$$f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right) \leq 0$$

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

l'ultima relazione è la definizione di convessità di $f(x)$ e ciò conclude la prima parte della dimostrazione.

Dimostrazione teorema sulla convessità, seconda parte. Ipotizziamo $f(x)$ convessa e quindi anche $h(x) \leq 0$. Riportiamo in tabella la situazione:

	a		$a+\delta$		$b-\varepsilon$		b
$h(x)$	0	$-$		$-$		$-$	0
$h(x)$		$\searrow$		?		$\nearrow$	
$h'(x)$		$-$		?		$+$	

Si ha $h'(a) \leq 0 \leq h'(b)$. $h'(x)$ risulta crescente e quindi anche $f'(x)$ lo è, questo conclude la dimostrazione.

Per quanto precedentemente visto e per dimostrazioni analoghe per la concavità, se $f(x)$ è una funzione derivabile due volte, si ha quanto riassunto in tabella. Le conclusioni si traggono ricordando che la derivata seconda è la derivata prima della derivata prima.

$f'(x)$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	—	$\cup$
$f(x)$	concava	lineare	convessa

I segni della derivata seconda della tabella sono da interpretare come sempre identici in un certo intervallo del dominio.

Flesso: Un flesso (F) è un punto in cui una funzione cambia concavità.
Per quanto precedentemente visto si ha per le funzioni due volte derivabili:

x_F

$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

x_F

$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

Teorema di Cauchy: Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni

- continue in $[a;b]$
- derivabili in $]a;b[$
- $g(x) \neq 0 \forall x \in]a;b[$

allora $\exists c \in]a;b[$ tale che:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Dimostrazione del teorema di Cauchy:
utilizziamo la funzione ausiliaria

$$h(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$$

sulla quale valgono le relazioni:

$$h(a) = (f(b) - f(a))(g(a) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(a) - f(a)) =$$

$$h(b) = (f(b) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(b) - f(a)) =$$

$$h'(x) = (f(b) - f(a))\, g'(x) - (g(b) - g(a))\, f'(x)$$

Su $h(x)$ vale il teorema di Rolle, esiste quindi
$c \in \,]a; b[$ tale che $h'(c) = 0$ che significa

$$0 = (f(b) - f(a))\, g'(c) - (g(b) - g(a))\, f'(c)$$

Essendo $g'(x) \neq 0$ deve essere $g(a) \neq g(b)$, se fosse $g(a) = g(b)$ varrebbe il teorema di Rolle e $g'(x)$ si dovrebbe annullare in almeno un punto. In queste condizioni l'ultima equazione può essere riscritta:

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c)$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Teoremi sulle funzioni derivabili   Teorema di de l'Hopital

Sia $I =]a;b[$ e $c \in]a;b[\subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$ e $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni tali che:

- $f(x)$ e $g(x)$ siano derivabili in $I \vee I - \{c\}$
- $g'(x) \neq 0$ in $I \vee I - \{c\}$
- $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$ oppure $\left|\lim_{x \to c} f(x)\right| = \left|\lim_{x \to c} g(x)\right| = +\infty$
- $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \widetilde{\mathbb{R}}$

allora

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dimostrazione del teorema di de l'Hopital, caso $\frac{0}{0}$, $c \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$:

L'esistenza del limite ci assicura che $\forall \varepsilon > 0$ e $x \in [a_\varepsilon; c[$:

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \varepsilon$$

presi un x e u in $[a_\varepsilon; c[$ per il teorema di Cauchy si ha

$$\frac{f(x) - f(u)}{g(x) - g(u)} = \frac{f'(k)}{g'(k)}, k \in \,]x; u[$$

Teoremi sulle funzioni derivabili Teorema di de l'Hopital

Essendo k un qualsiasi valore in un intorno di c possiamo riscrivere la disuguaglianza che definisce il limite:

$$\left|\frac{f(x)-f(u)}{g(x)-g(u)}-l\right|<\varepsilon$$

passando al limite per $u \to c$, ricordando che $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|\leq\varepsilon$$

il che dimostra che anche $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. Gli altri casi si dimostrano in modo analogo.

Confronto tra $x^{\alpha}, \alpha > 0$ e e^{x}:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\alpha\ln(x)}}{e^{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\alpha\ln(x)-x} =$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(\alpha\ln(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\underbrace{\frac{\alpha\ln(x)}{x}}_{\text{del'Hopital caso}\frac{\infty}{\infty}} -1\right) =}$$

$$\boxed{=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\alpha}{x}-1\right) = \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty}$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}(\alpha\ln(x)-x)} = 0$$

Confronto tra $x^\alpha, \alpha > 0$ e $\ln(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \alpha x^\alpha = +\infty$$

Teoremi sulle funzioni derivabili Metodo delle tangenti di Newton

Sia $f(x)$ continua e derivabile su $[a;b]$, $a<b$ e sia

- $f(a)f(b)<0$
- $f'(x)<0 \forall x \in [a;b]$ (o $f'(x)>0$)
- $f''(x)$ sempre con lo stesso segno su $[a;b]$

allora

- $\exists$ un unico $c \in]a;b[$ tale che $f(c)=0$
- $\lim n \to +\infty x_n = c$

con x_n la successione:

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

Teoremi sulle funzioni derivabili   Metodo delle tangenti di Newton

Dimostrazione metodo delle tangenti, prima parte: Nelle condizioni proposte su $f(x)$ vale il teorema di Bolzano e quindi $\exists c \in]a;b[$ tale che $f(c) = 0$, c è unico perché la funzione è strettamente decrescente (crescente) su $[a;b]$ essendo $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$.

Teoremi sulle funzioni derivabili Metodo delle tangenti di Newton

Giustificazione successione metodo delle tangenti[11]: La successione x_n si può determinare approssimando la funzione con una sua tangente:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

la tangente incontra l'asse x in:

$$-f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \rightarrow x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

la x individuata diventa l'elemento successivo di x_n.

[11] Si omette la dimostrazione della convergenza della successione a c.

Calcolo approssimato delle radici quadrate

Il metodo di Newton permette di determinare un algoritmo per il calcolo approssimato delle radici quadrate. Con $r > 1$ consideriamo la funzione $f(x) = x^2 - r$ nell'intervallo $[1; r]$, soddisfa le ipotesi di convergenza del metodo:

- $1 - r = f(1) < 0 < f(r) = r^2 - r$
- $f'(x) = 2x > 0 \forall x \in [1; r]$
- $f''(x) = 2 > 0 \forall x \in [1; r]$

La successione per le $\sqrt{r}$, $r > 1$ può essere definita:

$$\begin{cases} x_0 = r \\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - r}{2x_n} = \frac{1}{2}x_n + \frac{r}{2x_n} \end{cases}$$

in particolare per la radice di 2 si ottiene:

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} \end{cases}$$

$$x_0 = 2, x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{17}{12}, x_3 = \frac{577}{408} \approx 1,4142$$

Soluzione approssimata dell'equazione trascendente $e^x = -x$

La soluzione dell'equazione è equivalente all'annullarsi della funzione $f(x) = e^x + x$. Consideriamo l'intervallo $[-1;0]$, in queste condizioni si ha:

- $\frac{1}{e} - 1 = f(-1) < 0 < f(0) = 1$
- $f'(x) = e^x + 1 > 0 \forall x \in [-1;0]$
- $f''(x) = e^x > 0 \forall x \in [-1;0]$

Possiamo definire la successione di Newton:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} + x_n}{e^{x_n} + 1} \end{cases}$$

dalla quale otteniamo

$$x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 \approx -0,56631$$[12]

[12] Con un software di calcolo algebrico si può ottenere come soluzione approssimata dell'equazione -0,56714

Studio di funzione

Sfruttando quanto visto su limiti e teoremi sulle funzioni derivabili è possibile studiare in modo preciso il comportamento di funzioni reali di variabile reale che siano derivabili. É possibile seguire le seguenti indicazioni per ottenere tutte le informazioni necessarie alla rappresentazione grafica di una funzione.

Studio di funzione $y = f(x) : D \to \mathbb{R}$

- Dominio
  - Determinare il più ampio sottoinsieme dei numeri reali per il quali la scrittura che definisce la funzione ha senso.
  - Scrivere il dominio come unione di intervalli per evidenziarne gli estremi.
- Segno
  - Risolvere la disequazione $f(x) > 0$.
  - Compilare una tabella riassuntiva per il segno tenendo conto del dominio.
- Limiti agli estremi del dominio
  - Calcolo dei limiti tenendo conto del segno della funzione.

Studio di funzione

- Calcolo della derivata I
  - Riscrivere la funzione in modalità che ne rendano più semplice la derivazione.
  - Calcolare la derivata.
- Segno della derivata I
  - Risolvere la disequazione $f'(x) > 0$, tenendo conto del dominio di funzione e derivata.
  - Compilare una tabella riassuntiva per il segno della derivata I tenendo conto del dominio di funzione e derivata.
  - In tabella segnare anche crescenza e decrescenza della $f(x)$.
  - Individuare i massimi e i minimi relativi e calcolarli.

Studio di funzione

- Calcolo della derivata II
  - Riscrivere la derivata I in modalità che ne rendano più semplice la derivazione.
  - Calcolare la derivata.
- Segno della derivata II
  - Risolvere la disequazione $f''(x) > 0$, tenendo conto del dominio di funzione e derivata I e II.
  - Compilare una tabella riassuntiva per il segno della derivata II tenendo conto del dominio di funzione e delle derivate.
  - In tabella segnare anche concavità e convessità della $f(x)$.
  - Individuare i flessi e calcolarli.

- Eventuali asintoti obliqui
  - Se la funzione va a ∞ quando x tende a ∞ può avere un asintoto obliquo. Verificarne la presenza ricordando che $m_{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} f'(x)$ e che $q_{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - m_{\pm} x$
- Rappresentazione grafica
  - Disegnare la curva iniziando dai punti di massimo, minimo e flesso individuati e dagli eventuali asintoti obliqui.

Dominio:

$$D =]0; +\infty[$$

Segno:

$$x^x > 0$$

$$e^{x\ln(x)} > 0$$

$$\forall x \in D$$

	0		$+\infty$
$f(x)$	$\nexists$	$+$	$\nexists$

Limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(x)} =$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^x = +\infty$$

Derivata I:

$$y = x^x = e^{x\ln(x)}$$

$$y' = e^{x\ln(x)}\left(\ln(x) + x\frac{1}{x}\right) = x^x\left(\ln(x)+1\right)$$

Segno derivata I:

$$x^x\left(\ln(x)+1\right) > 0 \rightarrow \ln(x) > -1 \rightarrow x > \frac{1}{e}$$

	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$
$f(x)$	$\nexists$	$\searrow$		$\nearrow$	$\nexists$

$$m\left(\frac{1}{e}, e^{-\frac{1}{e}}\right)$$

Derivata II:

$$y' = e^{x\ln(x)}\left(\ln(x)+1\right)$$

$$y'' = e^{x\ln(x)}\frac{1}{x} + e^{x\ln(x)}\left(\ln(x)+1\right)^2 = x^x\left(\left(\ln(x)+1\right)^2 + \frac{1}{x}\right)$$

Segno derivata II:

$$x^x\left(\left(\ln(x)+1\right)^2 + \frac{1}{x}\right) > 0 \rightarrow \forall x \in D$$

	0		$+\infty$
$f''(x)$	$\nexists$	$+$	$\nexists$
$f(x)$	$\nexists$	$\cup$	$\nexists$

Eventuali asintoti obliqui:

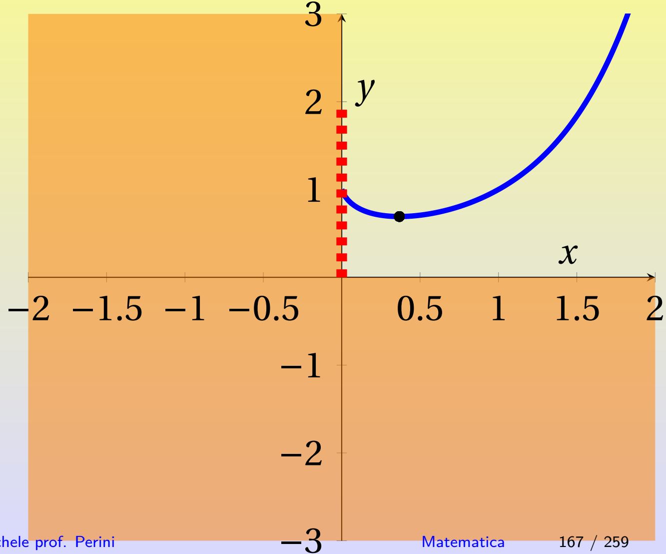
$$m_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^{x-1} = +\infty$$

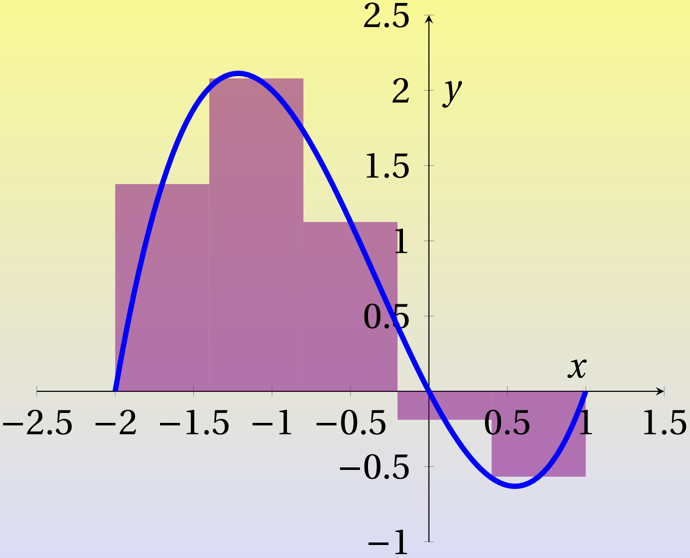
La funzione non ammette asintoto obliquo a $+\infty$.
Comportamento derivata I per $x \to 0^+$[13]:

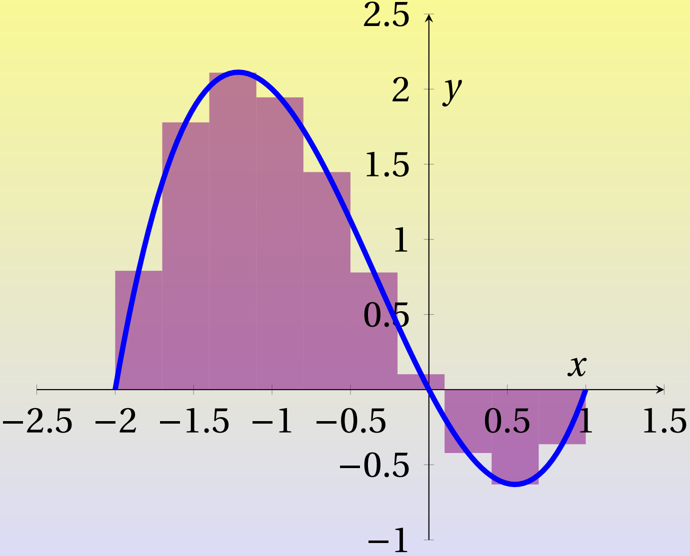
$$\lim_{x\to 0^+} x^x(\ln(x)+1) = -\infty$$

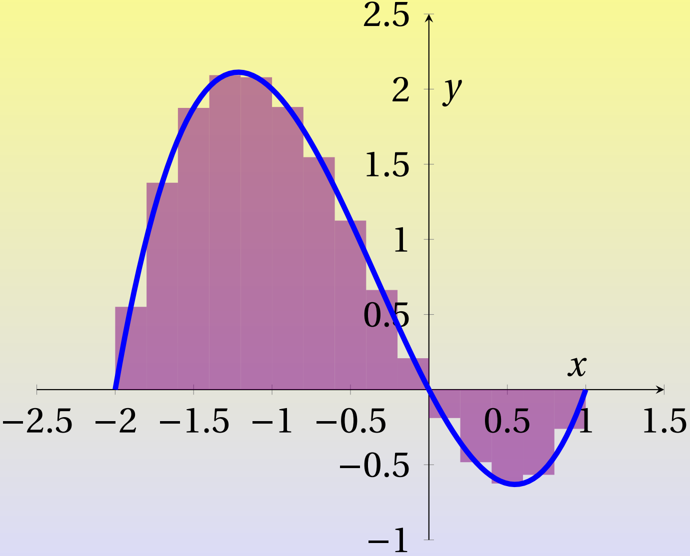
[13] Interessante vista la non esistenza della derivata prima in $x = 0$.

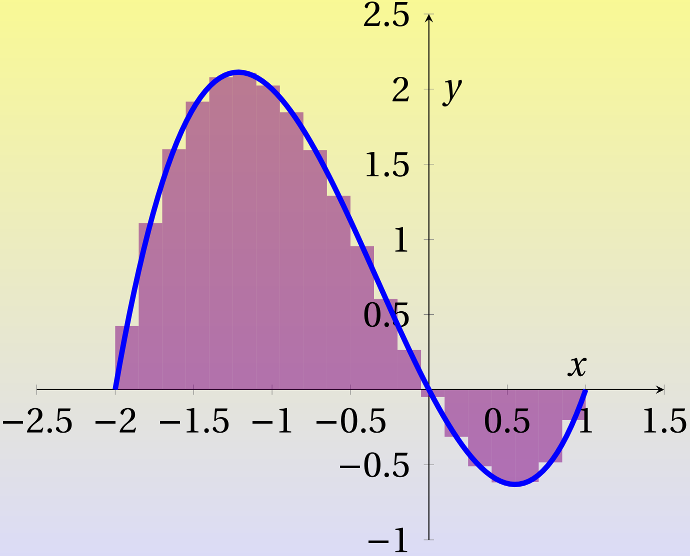
Grafico di $y = x^x$:




2.5
2
1.5
1
0.5
−0.5
−1
y
x
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5


2.5
2
y
1.5
1
0.5
x
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5
−0.5
−1


2.5
2
1.5
1
0.5
−0.5
−1
y
x
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5


2.5
2
1.5
1
0.5
−0.5
−1
y
x
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5

Data una funzione $f(x):[a;b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua su $[a;b]$, definiamo somma di Riemann la somma:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

con

$$x_i = a + \frac{b-a}{n}\left(i-\frac{1}{2}\right) \text{ e } \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

in particolare si ha:

$$x_1 = a+\frac{b-a}{2n},\ x_n = a+\frac{(b-a)\left(n-\frac{1}{2}\right)}{n} \text{ e } x_{i+1}-x_i = \Delta x$$

Sulle somme di Riemann per $n \to +\infty$ si ha:
$\Delta x \to 0$, $x_1 \to a$, $x_{+\infty} \to b$ e , $x_{i+1} - x_i \to 0$, questo suggerisce la seguente definizione di integrale e la relativa notazione.
Data una funzione $f(x) : [a; b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua su $[a; b]$, definiamo integrale di Riemann il limite[14]:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

[14] Utilizzando l'ipotesi di continuità della funzione e di chiusura dell'intervallo è possibile dimostrare che il limite della somma di Riemann converge sempre.

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue definite su $[a;b] \subset \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$ allora valgono le seguenti proprietà per gli integrali:

1. $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
4. $c \in]a;b[\rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
5. $f(x) \leq g(x) \forall x \wedge a < b \rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
6. $\int_a^b kdx = k(b-a)$

A titolo di esempio dimostriamo la seconda proprietà:

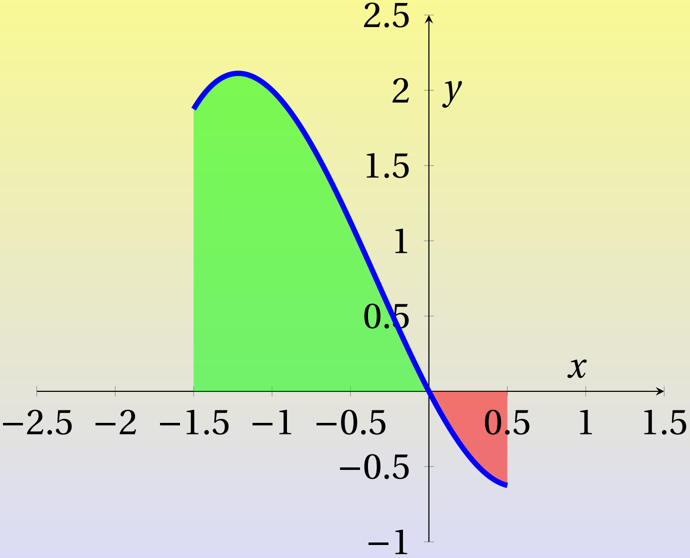
$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} kf(x_i)\Delta x =$$

$$= k \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = k\int_a^b f(x)dx$$

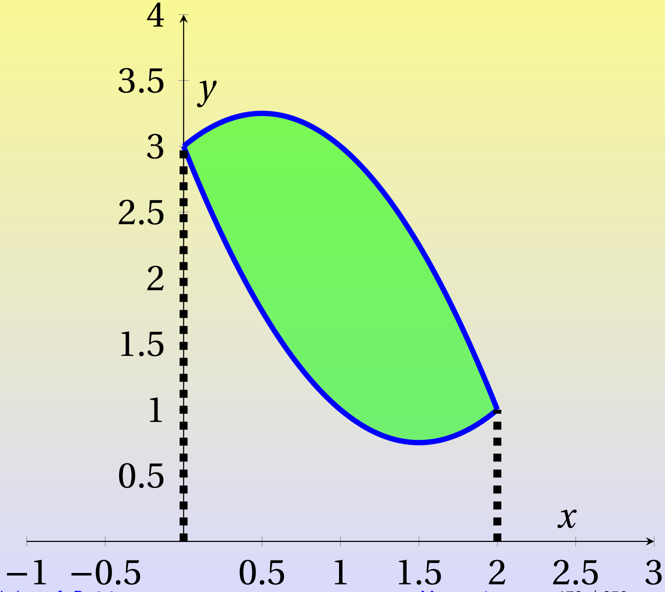
e la terza, con $x_i = a + \frac{b-a}{n}\left(i - \frac{1}{2}\right)$ e $\Delta x = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x =$$

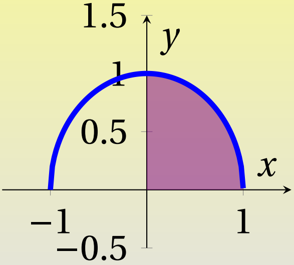
$$= -\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{n+1-i})(-\Delta x) = -\int_b^a f(x)dx$$


2.5
2
1.5
1
0.5
−0.5
−1
y
x
−2.5 −2 −1.5 −1 −0.5 0.5 1 1.5

Con $a < b$ se $f(x) \geq 0$ l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ è l'area compresa tra l'asse delle x, la funzione e le rette $x = a$ e $x = b$.
Con $a < b$ se $f(x) \leq 0$ l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ è l'opposto dell'area compresa tra l'asse delle x, la funzione e le rette $x = a$ e $x = b$.


4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
y
x
−1
−0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Con $a < b$ e $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a; b]$ l'integrale $\int_a^b f(x) - g(x) dx$ è l'area compresa tra l'asse delle x, le due funzioni e le rette $x = a$ e $x = b$.



$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$$

Media integrale

Se $f(x)$ è continua su $[a;b]$ definiamo il suo valor medio sull'intervallo come:

$$\overline{f}_{[a;b]} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Teorema della media: Se $f(x)$ è continua su $[a;b]$ e $\overline{f}_{[a;b]}$ è il suo valor medio, allora $\exists c \in [a;b]$ tale che $f(c) = \overline{f}_{[a;b]}$.

Dimostrazione del teorema della media:
consideriamo $a < b$, essendo $f(x)$ continua, per il teorema di Weierstrass si ha:

$$m \leq f(x) \leq M$$

integrando membro a membro l'espressione precedente si ottiene:

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M\,dx$$

che dividendo per $b - a > 0$ diventa:

$$\frac{\int_a^b m\,dx}{b-a} \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq \frac{\int_a^b M\,dx}{b-a}$$

$$\frac{m(b-a)}{b-a} \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le \frac{M(b-a)}{b-a}$$

$$m \le \overline{f}_{[a;b]} \le M$$

per il teorema di Darboux $\exists c \in \,]a;b[$ tale che $f(c) = \overline{f}_{[a;b]}$.

Teorema di Torricelli: Sia $f(x) : D \to \mathbb{R}$ continua su $[a;b]$ allora esiste una funzione $F(x)$ tale che:

- $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$
- $F'(x) = f(x)$.

Dimostrazione del teorema di Torricelli, prima parte: preso un qualsiasi punto $c \in]a;b[$ si ha per le proprietà dell'integrale:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx =$$

$$= -\int_c^a f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

definiamo $F(x) = \int_c^x f(t)dt$[15], si ha allora:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx + \int_c^b f(x)dx =$$

$$= -F(a) + F(b) = F(b) - F(a)$$

[15] Ricordiamo che la variabile di integrazione è muta, l'integrale non dipende da essa ma solo dalla funzione integranda e dall'intervallo di integrazione.

Dimostrazione del teorema di Torricelli, seconda parte: calcoliamo la derivata della funzione $F(x)$ ed utilizziamo la prima parte del teorema:

$$F'(x) = \lim_{h \to x} \frac{F(x) - F(h)}{x - h} = \lim_{h \to x} \frac{\int_h^x f(t)dt}{x - h}$$

l'ultima espressione è la media integrale della funzione f sull'intervallo $[h;x]$. Per il teorema della media esiste $k \in [h;x]$ tale che:

$$F'(x) = \lim_{h \to x} \frac{\int_h^x f(t)dt}{x - h} = \lim_{h \to x} f(k) = f(x)$$

l'ultima uguaglianza essendo vera per la continuità di f ed essendo $h \to x \to k$.

Le definizioni di integrale utilizzate sino ad ora si possono estendere su intervalli infiniti e per funzioni non continue su un insieme numerabile di punti.
Possiamo scrivere per $f(x)$ continua:

$$\int_{a}^{\pm\infty} f(x)dx = \lim_{t \to \pm\infty} \int_{a}^{t} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^{t} f(x)dx$$

Ipotizziamo $f(x)$ continua su $[a;b[$ e non continua in b, si può scrivere:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b} \int_a^t f(x)dx$$

Per una funzione non continua in altri punti è sufficiente suddividere gli intervalli di integrazione in sottointervalli con i punti di non continuità agli estremi.

Primitiva

Le primitive di una funzione $f(x)$ sono le funzioni $F(x)$ tali che $F'(x) = f(x)$. Per quanto visto sugli integrali e il teorema di Torricelli si adotta la notazione $F(x) = \int f(x)dx$.

Il teorema di Torricelli costituisce un importantissimo (anche se non unico) metodo per il calcolo degli integrali e li lega al calcolo delle primitive delle funzioni integrande.
Le regole di derivazione ottenute, se lette opportunamente portano alle primitive delle funzioni elementari.

$f(x)$	$F(x) = \int f(x)dx$
x^{α}	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^{x}	$e^{x} + C$

$\cos(x)$	$\sin(x)+C$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)+C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)+C$

Per le primitive valgono le seguenti proprietà, dimostrabili dalle proprietà delle derivate:

1. $\int f(x)+g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
2. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
3. $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$
4. se $y = g(x)$[16] allora
   $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy$

[16] Per poter scrivere il risultato della primitiva in x, $g(x)$ deve essere invertibile.

Dimostriamo la terza e la quarta proprietà.
Per la terza deriviamo membro a membro:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$f(x)g'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$$

Per la quarta con $y = g(x)$ e
$F(y) = \int f(y)dy \rightarrow F'(y) = f(y)$, deriviamo l'espressione membro a membro rispetto a x:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(y) \rightarrow f(g(x))g'(x) = F'(y)y' \rightarrow$$

$$\rightarrow f(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

La terza proprietà delle primitive suggerisce per il calcolo degli integrali la seguente formula, detta di integrazione per parti:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Primitiva di $f(x) = |x|$

$$\int |x|\,dx = \int 1 \cdot |x|\,dx =$$

$$\boxed{f(x) = |x|,\, g'(x) = 1 \rightarrow f'(x) = \frac{|x|}{x},\, g(x) = x}$$

$$= |x|\,x - \int |x|\,dx$$

riassumendo:

$$\int |x|\,dx = |x|\,x - \int |x|\,dx$$

$$\boxed{\int |x|\,dx = \frac{|x|\,x}{2} + C}$$

La quarta proprietà delle primitive suggerisce per il calcolo degli integrali la seguente formula, detta di integrazione per sostituzione con $y = g(x)$ e $x = g^{-1}(y)$[17]:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy$$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

[17] $g(x)$ deve essere iniettiva (e quindi sostanzialmente invertibile), se non lo fosse potrebbe accadere che $a \neq b \rightarrow g(a) = g(b)$ il che potrebbe rendere nullo l'integrale di destra e non nullo quello di sinistra.

La formula di integrazione per sostituzione permette di utilizzare in modo più ampio il simbolo di derivazione $\frac{dg}{dx} = g'(x)$. Riscriviamo gli integrali e ricordiamo che $y = g(x)$:

$$\int f(g(x)) \boxed{g'(x)dx} = \int f(y) \boxed{dy}$$

possiamo scrivere quindi

$$dy = dg = g'(x)dx \text{ oltre a } \frac{dg}{dx} = g'(x)$$

chiamiamo dg differenziale.

Integrali   Integrali di funzioni pari e dispari su $[-a;a]$

Per le funzioni pari $f(-x) = f(x)$ si ha:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

nel primo integrale si può effettuare il cambio di variabile $y = -x \rightarrow dy = -dx$ ottenendo:

$$= -\int_{a}^{0} f(-y)dy + \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(y)dy + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{a} f(y)dy + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Integrali Integrali di funzioni pari e dispari su $[-a;a]$

Per le funzioni dispari $f(-x) = -f(x)$ si ha:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

nel primo integrale si può effettuare il cambio di variabile $y = -x \rightarrow dy = -dx$ ottenendo:

$$= -\int_{a}^{0} f(-y)dy + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(y)dy + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= -\int_{0}^{a} f(y)dy + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

Primitiva di $f(x) = \tan(x)$

$$\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx =$$

$$\boxed{y = \cos(x) \rightarrow dy = -\sin(x)dx}$$

$$= -\int \frac{1}{y}dy = -\ln|y| + C = \boxed{-\ln|\cos(x)| + C}$$

$$\int \arctan(x)dx = \int 1 \cdot \arctan(x)dx =$$

$$\boxed{f(x) = \arctan(x), g'(x) = 1 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2+1}, g(x) = x}$$

$$= x\arctan(x) - \int \frac{x}{x^2+1}dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx =$$

$$\boxed{y = x^2 + 1 \rightarrow dy = 2x\,dx}$$

$$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}dy = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln|y| + C =$$

$$= \boxed{x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C}$$

$$\int \arcsin(x)dx = \int 1 \cdot \arcsin(x)dx =$$

$$\boxed{f(x) = \arcsin(x), g'(x) = 1 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, g(x) = x}$$

$$= x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin(x) + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$\boxed{y = 1-x^2 \rightarrow dy = -2x\,dx}$$

$$= x\arcsin(x) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{y}}dy = x\arcsin(x) + \frac{1}{2}\int y^{-\frac{1}{2}}dy =$$

$$= \boxed{x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C}$$

$$\int \arccos(x)dx = \int 1 \cdot \arccos(x)dx =$$

$$\boxed{f(x) = \arccos(x), g'(x) = 1 \to f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, g(x) =}$$

$$= x\arccos(x) + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arccos(x) - \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$\boxed{y = 1-x^2 \to dy = -2x\,dx}$$

$$= x\arccos(x) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{y}}dy = x\arccos(x) - \frac{1}{2}\int y^{-\frac{1}{2}}dy =$$

$$= \boxed{x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C}$$

Un quasi-polinomio è una funzione del tipo:

$e^{p_n(x)}q_m(x)$, con $p_n(x)$ e $q_m(x)$ polinomi di grado n e

La derivata di un quasi-polinomio è ancora un quasi-polinomio, somme di quasi-polinomi con identico esponente sono ancora quasi-polinomi. Possiamo ipotizzare che anche l'integrale di un quasi-polinomio possa essere un quasi-polinomio. In questa eventualità dovrebbe verificarsi che:

$$\int e^{p_n(x)}q_m(x)dx = e^{p_n(x)}r_l(x) + C$$

Derivando ambo i membri dell'espressione precedente si ottiene:

$$e^{p_n(x)} q_m(x) = e^{p_n(x)} r_l'(x) + e^{p_n(x)} p_n'(x) r_l(x)$$

$$q_m(x) = r_l'(x) + p_n'(x) r_l(x)$$

Il membro di sinistra dell'ultima equazione è un polinomio di grado m, il membro di destra un polinomio di grado $l+n-1$ ciò implica che $m = l+n-1 \rightarrow l = m-n+1$.

Esempio: primitiva di $e^{x^3}x^5$

$$\int e^{x^3}x^5\,dx = e^{x^3}\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)+C$$

derivando ambo i membri si ottiene:

$$e^{x^3}x^5 = e^{x^3}\left(3ax^5+3bx^4+3cx^3+(3a+3d)x^2+2bx+c\right.$$

che è vera per ogni x se

$$\begin{cases} 3a=1 \\ 3b=0 \\ 3c=0 \\ 3a+3d=0 \\ 2b=0 \\ c=0 \end{cases} \rightarrow \int e^{x^3}x^5\,dx = e^{x^3}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}\right)+C$$

Esempio: primitiva di e^{-x^2}

In questo caso si ha $l = 0 - 3 + 1 = -2$ questo non ci consente di scrivere un quasi-polinomio come risultato dell'integrale. In effetti si può dimostrare che la primitiva di e^{-x^2} non è scrivibile tramite composizione di funzioni elementari.

$$e^{-x^2}, \frac{\sin(x)}{x}, \frac{\cos(x)}{x}, \frac{e^x}{x}, \sin\left(x^2\right), \cos\left(x^2\right), \frac{1}{\ln(x)}, e^{x^4}x^5, \ldots$$

Alcune funzioni hanno primitive non esprimibili tramite composizione di funzioni elementari. In generale non è semplice dimostrare che una funzione non è elementarmente integrabile. Oltre a quelle elencate sopra siamo in grado di individuare, come funzioni non elementarmente integrabili, i quasi-polinomi non integrabili con il metodo di integrazione dei quasi-polinomi visto in precedenza.

$$\int \ln(x)\,dx =$$

$$\boxed{x = e^y \rightarrow y = \ln(x) \rightarrow dx = e^y\,dy}$$

$$= \int y e^y\,dy =$$

$$\boxed{\int y e^y\,dy = e^y\,(ay+b) \rightarrow y e^y = e^y\,(ay+b) + e^y a \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}}$$

$$= \boxed{x\,(\ln(x) - 1) + C}$$

Metodo delle sezioni:
Di un solido di cui si conosca il valore dell'area della sezione $S(x)$ che taglia il solido con un piano perpendicolare all'asse x, si può determinare il volume con la formula:

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Il volume in questo caso è la somma dei volumi dei solidi di area di base $S(x)$, altezza dx e volume $S(x)dx$ che otteniamo sezionando finemente il solido con piani perpendicolari all'asse x che distano dx l'uno dall'altro.

Volume di una piramide a base triangolare

Determiniamo il volume della piramide di vertici $O(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$.
Le sezioni della piramide con piani paralleli al piano xOy sono triangoli rettangoli di cateti di misura rispettivamente $a\left(1-\frac{z}{c}\right)$ e $b\left(1-\frac{z}{c}\right)$. Usando il metodo delle sezioni il volume diventa:

$$V=\int_0^c \frac{1}{2}a\left(1-\frac{z}{c}\right)b\left(1-\frac{z}{c}\right)dz=$$

$$= \frac{1}{2}ab\int_0^c \left(1-\frac{z}{c}\right)^2 dz =$$

$$\boxed{w = 1-\frac{z}{c} \rightarrow dw = -\frac{dz}{c}}$$

$$= -\frac{1}{2}ab\int_1^0 w^2 c\,dw =$$

$$= -\frac{1}{2}abc\int_1^0 w^2 dw =$$

$$= -\frac{1}{2}abc\left[\frac{w^3}{3}\right]_1^0 = \frac{1}{6}abc$$

Rotazione attorno all'asse x:
Il volume dei solidi ottenuti dalla rotazione attorno all'asse x della funzione $y = f(x)$ si può ottenere dalla formula:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Il volume in questo caso è la somma dei volumi dei cilindretti di raggio $f(x)$ e altezza dx, ogni cilindretto ha pertanto area di base $\pi(f(x))^2$ e volume $\pi(f(x))^2 \, dx$.

Volume di una sfera

Determiniamo il volume della sfera generata dalla rotazione della semicirconferenza $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ attorno all'asse x.

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 dx =$$

$$= \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} = \pi \left(2r^3 - \frac{2}{3} r^3 \right) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Rotazione attorno all'asse y, metodo gusci cilindrici:
Il volume dei solidi ottenuti dalla rotazione attorno all'asse y della funzione $y = f(x)$ si può ottenere dalla formula:

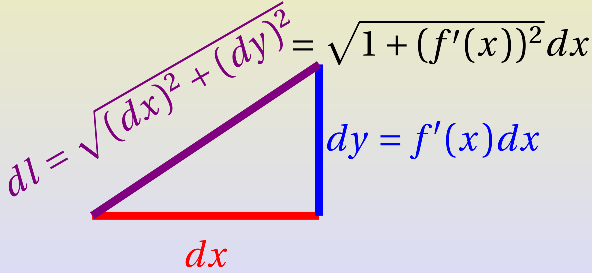
$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Il volume in questo caso è la somma dei volumi dei gusci cilindrici di spessore dx, raggio interno x, raggio esterno $x + dx$ e altezza $f(x)$ con asse di simmetria sull'asse y. Ogni guscio è equivalente al parallelepipedo di altezza $f(x)$, profondità dx e lunghezza $2\pi x$ e volume $2\pi x f(x) dx$.

La lunghezza di una curva $f(x)$ su un intervallo $[a;b]$ si può determinare tramite la formula

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

giustificabile tramite la rappresentazione grafica:



Circonferenza

Determiniamo la lunghezza della semicirconferenza
$y=\sqrt{r^2-x^2} \rightarrow y'=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$.

$$l=\int_{-r}^{r}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}dx=\int_{-r}^{r}\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}dx=\int_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}dx=$$

$$\boxed{z=\frac{x}{r}\rightarrow dz=\frac{dx}{r}}$$

$$=r\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz=r\left[\arcsin(z)\right]_{-1}^{1}=\pi r$$

Le superfici "laterali" (cioè quelle generate direttamente dalla curva e non dagli estremi dell'intervallo in cui essa è considerata) dei solidi di rotazione si possono determinare con la formula:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

che rappresenta la somma delle superfici laterali dei tronchetti di cono $(S_l = \pi(r_1 + r_2)a)$ con asse sull'asse x di raggi $r_1 = f(x)$ e $r_2 = f(x) + dy \approx f(x)$, spessore dx e apotema $a = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$.

Superficie di una sfera

Determiniamo la superficie di una sfera generata dalla rotazione della semicirconferenza $y = \sqrt{r^2 - x^2} \to y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ attorno all'asse x.

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx =$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-r}^{r} r\, dx =$$

$$= 2\pi \left[r\, x\right]_{-r}^{r} = 4\pi r^2$$

Equazioni differenziali

Una equazione differenziale è una equazione la cui incognita è una funzione che compare nella stessa assieme ad almeno una delle sue derivate. In simboli una equazione differenziale con incognita la funzione $y = f(x)$ è un'equazione del tipo:

$$\phi(f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^n(x)) = 0$$

è una equazione differenziale le seguente:

$$yy' = 1$$

Di seguito vedremo come risolvere alcune equazioni differenziali.

Una equazione differenziale omogenea del primo ordine è una equazione del tipo:

$$y' = a(x)y$$

Per risolverla utilizzeremo la scrittura $y' = \frac{dy}{dx}$ e le proprietà del differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y \rightarrow \frac{dy}{y} = a(x)dx \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int a(x)dx \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln|y| + C_1 = \int a(x)dx \rightarrow \ln|y| = \int a(x)dx - C_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow e^{\ln|y|} = e^{\int a(x)dx - C_1} \rightarrow |y| = e^{\int a(x)dx} e^{-C_1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{y = C e^{\int a(x)dx}}$$

Equazioni differenziali Primo ordine non omogenee

Una equazione differenziale non omogenea del primo ordine è una equazione del tipo:

$$y' = a(x)y + b(x)$$

Per risolverla moltiplichiamo ambo i membri per $e^{-\int a(x)dx}$:

$$e^{-\int a(x)dx}y' = e^{-\int a(x)dx}a(x)y + e^{-\int a(x)dx}b(x)$$

$$e^{-\int a(x)dx}y' - e^{-\int a(x)dx}a(x)y = e^{-\int a(x)dx}b(x)$$

$$\left(e^{-\int a(x)dx}y\right)' = e^{-\int a(x)dx}b(x)$$

Equazioni differenziali Primo ordine non omogenee

$$e^{-\int a(x)dx}y = \int e^{-\int a(x)dx}b(x)dx$$

$$\boxed{y = e^{\int a(x)dx}\int e^{-\int a(x)dx}b(x)dx}$$

Una equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili è una equazione del tipo:

$$y' = a(x)b(y)$$

Le equazioni di questo tipo si possono risolvere utilizzando i differenziali e le loro proprietà:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)b(y)$$

$$\frac{dy}{b(y)} = a(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x)dx$$

...

A titolo d'esempio risolviamo l'equazione differenziale

$$yy' = 1$$

$$y\frac{dy}{dx} = 1$$

$$y\,dy = dx$$

$$\int y\,dy = \int 1\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} + C_1 = x + C_2 \rightarrow \frac{y^2}{2} = x + C_3$$

$$y = \pm\sqrt{2x + C}$$

Una equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine è un'equazione del tipo:
$ay'' + by' + cy = 0$ le cui soluzioni sono:

se $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \rightarrow y = C_1 e^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}x} + C_2 e^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}x}$

se $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \rightarrow y = e^{\frac{-b}{2a}x}(C_1 + C_2 x)$

se $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \rightarrow$

$$y = e^{\frac{-b}{2a}x}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}\right.\right.$$

Il seguente principio può essere utile nella risoluzione delle equazioni differenziali. Se $y_O = f_O(x)$ è soluzione di una equazione differenziale omogenea del primo ordine $y' = a(x)y$ e $y_P = f_P(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $y' = a(x)y + b(x)$ allora $y = f(x) = f_O(x) + f_P(x) = y_O + y_P$ è ancora soluzione dell'equazione $y' = a(x)y + b(x)$.

Dimostrazione: Basta sostituire $y = y_O + y_P$ nell'equazione $y' = a(x)y + b(x)$:

$$(y_O + y_P)' = a(x)\,(y_O + y_P) + b(x)$$

$$y_O' + y_P' = a(x)y_O + a(x)y_P + b(x) \rightarrow 0 = 0$$

Il principio rimane valido anche per le equazioni del secondo ordine. Se $y_O = f_O(x)$ è soluzione dell'equazione $ay'' + by' + cy = 0$ e $y_P = f_P(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $ay'' + by' + cy = g(x)$ allora $y = f(x) = f_O(x) + f_P(x) = y_O + y_P$ è ancora soluzione dell'equazione $ay'' + by' + cy = g(x)$.

Dimostrazione: Basta sostituire $y = y_O + y_P$ nell'equazione $ay'' + by' + cy = g(x)$ ottenendo $\left(ay_O'' + by_O' + cy_O\right) + \left(ay_P'' + by_P' + cy_P\right) = g(x)$.

Risolviamo l'equazione differenziale:

$$y'' - y = 2\sin(x)$$

Determiniamo le soluzioni y_O dell'equazione omogenea $y'' - y = 0$:

$$y_O = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Ipotizziamo una $y_P = A\cos(x) + B\sin(x)$, implica:

$$-A\cos(x) - B\sin(x) - (A\cos(x) + B\sin(x)) = 2\sin(x)$$

$$y_P = -\sin(x)$$

La soluzione dell'equazione è la somma delle soluzioni trovate
$y = y_O + y_P = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \sin(x)$.

Le soluzioni delle equazioni differenziali sono famiglie di funzioni che dipendono da alcuni parametri. La determinazione delle soluzioni dell'equazione differenziale al variare delle condizioni iniziali si chiama problema di Cauchy. In simboli per le equazioni del primo e del secondo ordine il problema di Cauchy diventa:

$$\begin{cases} \phi\big(f(x), f'(x)\big) = 0 \\ f(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \phi\big(f(x), f'(x), f''(x)\big) = 0 \\ f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

Distribuzione di probabilità

Variabile aleatoria o casuale

Una variabile aleatoria è una funzione (solitamente iniettiva) che associa eventi a numeri reali.

Una variabile aleatoria può assumere solo valori reali.

Consideriamo una variabile aleatoria X con le seguenti caratteristiche:

- X può assumere i valori reali $x_1, x_2, \dots, x_n$.
- Gli eventi rappresentati dalla variabile casuale sono tutti disgiunti tra loro.
- Ognuno dei valori della variabile X si presenta rispettivamente con una probabilità $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Sulla variabile aleatoria X si ha:

- $$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ p_i \geq 0 \forall i$$

- Media o speranza matematica: $E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

- Varianza: $V(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (\mu - x_i)^2$

- Deviazione standard: $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i (\mu - x_i)^2}$

Per la varianza vale anche la seguente relazione:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(\mu - x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i\left(\mu^2 + x_i^2 - 2\mu x_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(p_i\mu^2 + p_i x_i^2 - 2p_i\mu x_i\right) =$$

$$= \mu^2 \sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^{n} p_i x_i =$$

$$= \mu^2 + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - 2\mu^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2\right) - \mu^2$$

Distribuzione di Bernoulli

Con $X = 0, 1, 2, \ldots, x, \ldots n$ e $q = 1 - r$ la distribuzione binomiale o di Bernoulli è:

$$p\left(X = x\right) = \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array}\right) r^x q^{n-x}$$

La probabilità descritta dalla distribuzione è relativa a due eventi, il primo si verifica con probabilità r, l'altro con probabilità $q = 1 - r$. Su n prove ripetute la distribuzione fornisce la probabilità che il primo evento si verifiche esattamente x volte.

Distribuzione di Bernoulli

Su n prove totali, se il primo evento si verifica x volte, il secondo deve verificarsi $n-x$ volte. La probabilità che si verifichino prima x eventi di probabilità r e poi $n-x$ eventi con probabilità q è $r^x q^{n-x}$, il coefficiente binomiale dà conto di tutte le possibili sequenze dei due eventi che si possano presentare.

Distribuzione di Bernoulli

Ricordando il binomio di Newton si ha per la somma delle probabilità:

$$\sum_{x=0}^{x=n} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} r^x q^{n-x} = (r+q)^n = 1^n = 1$$

La media della distribuzione binomiale è:

$$\mu = \sum_{x=0}^{x=n} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} r^x q^{n-x} x = \sum_{x=1}^{x=n} \frac{n!}{(n-x)!x!} r^x q^{n-x} x =$$

Distribuzione di Bernoulli

$$= \sum_{x=1}^{x=n} \frac{n!}{(n-x)!(x-1)!} r^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^{x=n} \frac{n(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!} r^x q^{n-}$$

$$= n \sum_{x=1}^{x=n} \binom{n-1}{x-1} r^x q^{n-x} =$$

$$\boxed{x = y + 1 \rightarrow y = x - 1}$$

$$= n \sum_{y=0}^{y=n-1} \binom{n-1}{y} r^{y+1} q^{n-y-1} =$$

$$= nr \sum_{y=0}^{y=n-1} \binom{n-1}{y} r^y q^{n-y-1} = nr(r+q)^{n-1} = nr$$

Distribuzione di Bernoulli

La varianza della distribuzione binomiale è:

$$\sigma^2 = \left(\sum_{x=0}^{x=n} \binom{n}{x} r^x q^{n-x} x^2 \right) - (nr)^2 =$$

$$= \left(\sum_{x=1}^{x=n} \frac{n(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!} r^x q^{n-x} x \right) - (nr)^2 =$$

$$= \left(n \sum_{x=1}^{x=n} \binom{n-1}{x-1} r^x q^{n-x} x \right) - (nr)^2 =$$

Distribuzione di Bernoulli

$$\boxed{x = y + 1 \rightarrow y = x - 1}$$

$$= \left(n \sum_{y=0}^{y=n-1} \binom{n-1}{y} r^{y+1} q^{n-y-1} (y+1) \right) - (nr)^2 =$$

$$= \left(nr \sum_{y=0}^{y=n-1} \binom{n-1}{y} r^{y} q^{n-y-1} (y+1) \right) - (nr)^2 =$$

$$= nr \left[\sum_{y=0}^{y=n-1} \binom{n-1}{y} r^{y} q^{n-y-1} y + \sum_{y=0}^{y=n-1} \binom{n-1}{y} r^{y} q^{n-y-1} \right] - (nr)^2 =$$

$$= nr\left[(n-1)r + (r+q)^{n-1}\right] - (nr)^2 = -nr^2 + nr = nr(1-$$

Distribuzione di Poisson

Con $X = 0, 1, 2, \ldots, x, \cdots = \mathbb{N}$ e $\mu > 0$ la distribuzione di Poisson è:

$$p(X = x) = e^{-\mu} \frac{\mu^x}{x!}$$

La distribuzione di Poisson si può ricavare come limite $n \to +\infty$ dalla distribuzione di Bernoulli con $\mu = nr > 0$ e quindi con $r \to 0$.

$$p(X = x) = \lim_{n \to +\infty} \binom{n}{x} r^x q^{n-x} = \lim_{n \to +\infty} \binom{n}{x} \left(\frac{\mu}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-x} =$$

Distribuzione di Poisson

$$= \lim_{n\to+\infty} \binom{n}{x} \left(\frac{\mu}{n}\right)^x \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-x} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \binom{n}{x} \left(\frac{\mu}{n}\right)^x \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-x} \underbrace{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n}}_{\to e^{-\mu}} =$$

$$= e^{-\mu} \lim_{n\to+\infty} \binom{n}{x} \left(\frac{\mu}{n}\right)^x \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-x} =$$

$$= e^{-\mu} \lim_{n\to+\infty} \binom{n}{x} \left(\frac{\mu}{n-\mu}\right)^x = e^{-\mu}\mu^x \lim_{n\to+\infty} \binom{n}{x} \left(\frac{1}{n-\mu}\right)^x$$

Distribuzione di Poisson

$$= e^{-\mu}\mu^x \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n-x)!x!}\left(\frac{1}{n-\mu}\right)^x =$$

$$= e^{-\mu}\frac{\mu^x}{x!} \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n-x)!}\left(\frac{1}{n-\mu}\right)^x =$$

$$= e^{-\mu}\frac{\mu^x}{x!} \lim_{n\to+\infty} \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-x+1)}^{\text{polinomio grado } x}}{\underbrace{(n-\mu)^x}_{\text{polinomio grado } x}} = e^{-\mu}\frac{\mu^x}{x!}$$

Distribuzione di Poisson

Verifichiamo la somma delle probabilità:

$$\sum_{x=0}^{+\infty} e^{-\mu}\frac{\mu^x}{x!} = e^{-\mu}\sum_{x=0}^{+\infty}\frac{\mu^x}{x!}^{18} = e^{-\mu}e^{\mu} = 1$$

La media della distribuzione di Poisson è:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{+\infty} e^{-\mu}\frac{\mu^x}{x!}x = \sum_{x=1}^{+\infty} e^{-\mu}\frac{\mu^x}{(x-1)!} = e^{-\mu}\mu\sum_{x=1}^{+\infty}\frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!}$$

[18] $\sum_{x=0}^{+\infty}\frac{\mu^x}{x!}$ è lo sviluppo in serie di e^{μ}.

Distribuzione di Poisson

$$\boxed{y = x - 1}$$

$$= e^{-\mu}\mu\sum_{y=0}^{+\infty}\frac{\mu^{y}}{(y)!} = e^{-\mu}\mu e^{\mu} = \mu$$

La varianza della distribuzione di Poisson è:

$$\sigma^2 = \left(\sum_{x=0}^{+\infty} e^{-\mu}\frac{\mu^x}{x!}x^2\right) - \mu^2 = e^{-\mu}\left(\sum_{x=1}^{+\infty}\frac{\mu^x}{x!}x^2\right) - \mu^2 =$$

$$= e^{-\mu}\mu\left(\sum_{x=1}^{+\infty}\frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!}x\right) - \mu^2 =$$

Distribuzione di Poisson

$$\boxed{y = x - 1}$$

$$= e^{-\mu}\mu\left(\sum_{y=0}^{+\infty}\frac{\mu^y}{(y)!}(y+1)\right) - \mu^2 =$$

$$= e^{-\mu}\mu\left[\sum_{y=0}^{+\infty}\frac{\mu^y}{y!}y + \sum_{y=0}^{+\infty}\frac{\mu^y}{y!}\right] - \mu^2 =$$

$$= e^{-\mu}\mu\left[\mu e^{\mu} + e^{\mu}\right] - \mu^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu$$

Consideriamo una variabile aleatoria X con le seguenti caratteristiche:

- X può assumere tutti valori reali $X = \mathbb{R}$.
- Definiamo una funzione densità di probabilità $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.
- La probabilità $p(X \in [a;b]) = \int_a^b f(x)dx$

Sulla variabile aleatoria X si ha:

- $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,\ f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$
- Media o speranza matematica: $E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$
- Varianza: $V(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu - x)^2 f(x)dx$
- Deviazione standard: $\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (\mu - x)^2 f(x)dx}$

Per la varianza vale anche la seguente relazione:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu - x)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu^2 + x^2 - 2\mu x) f(x) dx =$$

$$= \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - 2\mu \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx =$$

$$= \mu^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - 2\mu^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2$$

Distribuzione di uniforme

Con $X = \mathbb{R}$ e $a < b$ una distribuzione uniforme è una distribuzione del tipo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \text{ se } a \leq x \leq b \\ 0 \text{ se } x < a \vee x > b \end{cases}$$

Verifichiamo la probabilità totale:

$$p(x \in \,]-\infty; +\infty[) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}dx = 1$$

Distribuzione di uniforme

La media della distribuzione uniforme è:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{a+b}{2}$$

La varianza della distribuzione uniforme è:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \mu^2$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b - \mu^2 = \frac{1}{3}\frac{1}{b-a}\left[b^3 - a^3\right] - \mu^2 =$$

Distribuzione di uniforme

$$= \frac{1}{3}\left[b^2 + ab + a^2\right] - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} =$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribuzione normale

Con $X = \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$ una distribuzione normale (o di Gauss) è una distribuzione del tipo:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Verifichiamo la probabilità totale:

$$p(x \in]-\infty; +\infty[) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

Distribuzione normale

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx =$$

$$\boxed{y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \to dy = \frac{dx}{\sqrt{2}\sigma}}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = 1$$ [19]

[19] La funzione e^{-x^2} non è elementarmente integrabile, tuttavia si può dimostrare che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Distribuzione normale

La media della distribuzione normale è:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} x e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx =$$

$$\boxed{y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \to dy = \frac{dx}{\sqrt{2}\sigma}}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{2}\sigma y + \mu\right) e^{-y^2} \sqrt{2}\sigma \, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{2}\sigma y + \mu\right) e^{-y^2} dy =$$

Distribuzione normale

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{2}\sigma y e^{-y^2} dy}_{=0 \text{ perché funzione dispari}} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mu e^{-y^2} dy =$$

$$= \mu \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy}_{=\sqrt{\pi}} = \mu$$

Distribuzione normale

La varianza della distribuzione normale è:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx - \mu^2 =$$

$$\boxed{y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \to dy = \frac{dx}{\sqrt{2}\sigma}}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{2}\sigma y + \mu\right)^2 e^{-y^2} dy - \mu^2 =$$

Distribuzione normale

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{2}\sigma y + \mu\right)^2 e^{-y^2}\, dy - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mu^2 e^{-y^2}\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(2\sqrt{2}\mu\sigma y + 2\sigma^2 y^2\right) e^{-y^2}\, dy =$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-y^2}\, dy}_{=\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \sigma^2$$